

ALEX VAN DEN BRANDHOF

# PRIEM WOESTIJNEN

HOOGTEPUNTEN UIT DE  
**WISKUNDE**  
VAN DE **21<sup>e</sup>** EEUW

2018 Prometheus Amsterdam

© 2018 Alex van den Brandhof

Omslagontwerp CMRB

Foto auteur Christian Höhener

Zetwerk Elgraphic bv, Vlaardingen

[www.uitgeverijprometheus.nl](http://www.uitgeverijprometheus.nl)

ISBN 978 90 446 3683 3

**2001**

---

## De Lorenz-aantrekker

Hemelvaartsdag 1983: de zon zou zich in Nederland laten zien en het zou matig tot vrij krachtig waaïen. Voor later op de dag was een enkele bui voorspeld. Veel mensen besloten op deze vrije donderdag eropuit te trekken. In de loop van de hemelvaartsochtend zag het KNMI een storing vanuit het zuidwesten op Nederland afkoersen. De meteorologen realiseerden zich dat ze de dag ervoor een volstrekt foute voorspelling hadden gedaan. Het KNMI gaf een waarschuwing uit, maar voor veel mensen kwam die te laat. Op het IJsselmeer en op de Loosdrechtse Plassen krioelde het al van de zeilboten toen een zware storm plotseling opstak. Het noodweer eiste tien levens en liet een spoor van vernielingen achter.

Voorbeelden van foute weersverwachtingen zijn er bij de vleet, maar veel vaker wél dan niet zijn de verwachtingen best redelijk, in elk geval op de korte termijn. Goed beschouwd is dat een klein wonder, want het weer voorspellen is een precare zaak. Wil een computer het weer voor de komende dagen in Nederland voorspellen, moet het apparaat de toestand van het weer nú kennen en het moet weten op welke manier die toestand aan het veranderen is. En dat niet alleen in Nederland, maar op de hele wereld, want lucht kan zich in een paar dagen duizenden kilometers verplaatsen. De computer moet daarom weten of er boven de Balearen een wolkeloos

hogedrukgebied hangt, of er een depressie is boven de oostkust van Canada, en of er hete lucht uit de Sahara onze kant op stroomt.

Voor een perfecte prognose moet je de computer voeden met exacte meetwaarden van elk punt op de aarde en uit de troposfeer, de onderste laag van de dampkring. Omdat dat onmogelijk is, verdelen meteorologen de atmosfeer in een soort driedimensionaal raster. Alleen op de roosterpunten worden de waarden van luchtdruk, wind, vochtigheid, temperatuur en andere meteorologische variabelen bepaald. Dat gebeurt zo nauwkeurig mogelijk, maar er zijn grenzen aan de meetapparatuur wat betreft exactheid.

De eerste keer dat een weersvoorspelling met behulp van een computer werd gedaan, was in 1950. De berekeningen werden gedaan op de ENIAC (Electronical Numerical Integrator and Computer), door een team van Amerikaanse meteorologen en de wiskundige John von Neumann, die aan het Institute for Advanced Study in Princeton werkte. De ENIAC had een gewicht van 27 ton, nam een kamer van 167 vierkante meter in beslag en beschikte nog niet eens over een beeldscherm. Voor een eendaagse weersvoorspelling had deze reuzenmachine bijna een etmaal nodig. In die tijd was dat ongelooflijk snel, maar een moderne smartphone kan diezelfde berekeningen in minder dan een seconde uitvoeren.

Von Neumann zag de toekomst van de weersvoorspelling zonnig tegemoet. Computers zouden veel sneller worden, meetapparatuur nauwkeuriger en het raster fijnmaziger. Von Neumann dacht dat er ooit een tijd zou komen waarin meteorologen het weer met gemak een maand vooruit zouden kunnen voorspellen.

★

Met de komst van computers kwamen ‘numerieke methoden’ om zogenaamde differentiaalvergelijkingen op te lossen in de mode. Differentiaalvergelijkingen hebben veel toepassingen, onder meer in de natuurkunde, biologie en economie. Ze beschrijven hoe – gegeven enkele startvoorwaarden – bepaalde hoeveelheden in de loop van de tijd veranderen. In een differentiaalvergelijking komen dan ook ‘afgeleide functies’ voor; de ‘afgeleide’ van een functie geeft de mate van verandering van die functie aan. Een trillende gitaarsnaar of het opwarmen of afkoelen van een of ander voorwerp zijn voorbeelden van ‘systemen’ die met differentiaalvergelijkingen beschreven kunnen worden.

Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking draait het erom een formule te vinden die een hoeveelheid van iets op een bepaald moment uitdrukt. Alleen in de eenvoudigste gevallen kun je oplossingen vinden die zijn opgebouwd uit een eindig aantal basisfuncties. Een voorbeeld is de vergelijking  $y' + y \cdot \cos t = 0$ , waarvan de oplossingen de vorm  $y = c \times e^{-\sin t}$  hebben – dat is basisstof voor iedereen die een exacte studie doet. De  $c$  is daarbij een constante en als er een beginwaarde van de gezochte oplossing van de differentiaalvergelijking bekend is (dat wil zeggen, de oplossing voor  $t = 0$ ), kun je die  $c$  expliciet berekenen. Als het lukt om de oplossing van een differentiaalvergelijking in zo’n eenvoudige vorm weer te geven, spreken wiskundigen van een exacte oplossing.

Heel vaak lukt het echter niet om zo’n exacte oplossing te vinden. De dynamische effecten van het weer laten zich wiskundig prima modelleren met differentiaalvergelijkingen, maar de bewegingsvergelijkingen van de atmosfeer – waarin relaties tussen wind, temperatuur, luchtdruk en dergelijke zijn vastgelegd – zijn veel te complex om exact op te lossen. Toch hebben meteorologen die oplossingen nodig om iets zinnigs te kunnen zeggen over het toekomstige weer. Een computer

kan ook niet alles, maar het berekenen van benaderingsoplossingen van differentiaalvergelijkingen kun je aan hem over laten. Voorwaarde voor zo'n berekening is dat de begintoestand bekend is. Door iteratie (het telkens opnieuw gebruiken van de output als nieuwe input) kan een computer een lange rij uitkomsten produceren, die een beeld van de toekomst schetsen. Deze discipline heet 'numerieke wiskunde'.

In het begin van de jaren zestig ontwikkelde Edward Lorenz, een Amerikaanse wiskundige en meteoroloog van het Massachusetts Institute of Technology, een wiskundig model dat de beweging van opstijgende lucht in de aardatmosfeer beschreef. Het gedrag van die beweging wilde hij met behulp van computersimulaties onderzoeken. Aan de hand van een stelsel differentiaalvergelijkingen met twaalf variabelen en evenzoveel door Lorenz ingevoerde startwaarden, rekende zijn Royal McBee LGP-30 stapje voor stapje de volgende waarden in het systeem uit. Ondertussen haalde Lorenz een kop koffie. Toen hij terugkwam van zijn koffiepauze had de computer een lange lijst getallen geproduceerd. Ter controle voerde Lorenz de getallen die halverwege de lijst stonden als nieuwe startwaarden in en voerde nóg een simulatie uit. Als alles volgens plan zou verlopen, zou de eerst helft van de nieuwe lijst gelijk zijn aan de tweede helft van de eerste lijst. Maar het ging anders. Al na korte tijd waren de uitkomsten totaal verschillend. Lorenz piekerde wat er mis kon zijn gegaan, en ineens begreep hij het: de afwijkingen waren het gevolg van de handmatige invoer. In het computergeheugen werden getallen tot zes cijfers achter de komma nauwkeurig opgeslagen, maar de printer gaf maar drie decimalen. Een getal dat in de computer als 0,307126 was opgeslagen, voerde Lorenz bij de tweede simulatie in als 0,307. Lorenz ontdekte dat dergelijke minieme verschillen al heel snel steeds groter wordende afwijkingen veroorzaken.

Lorenz' model was veel te simplistisch om als echte weersvoorspeller door te kunnen gaan en dat wist hij zelf natuurlijk ook wel. Desalniettemin was Lorenz' onderzoek heel nuttig, want zo kwam hij erachter dat er veranderlijke systemen bestaan die heel gevoelig zijn voor minuscule afwijkingen. Zo ontstond de chaostheorie, al was het eigenlijk iemand anders die voor het eerst ontdekte dat kleine verschillen in de beginvoorwaarden grote verschillen in de eindverschijnselen kunnen voortbrengen. De Fransman Henri Poincaré schreef al in 1908 in een filosofisch essay in zijn boek *Science et Méthode*:

Waarom hebben meteorologen er zo veel moeite mee het weer met enige zekerheid te voorspellen? ... We zien dat grote storingen zich meestal voordoen in gebieden waar de atmosfeer in labiel evenwicht is. Meteorologen zien wel dat dat evenwicht labiel is en dat een cycloon ergens ontstaat, maar waar, dat kunnen ze niet zeggen. Een tiende graad meer of minder op een willekeurig punt en de cycloon breekt hier los en niet daar, en hij woedt in streken die hij anders gespaard zou hebben. Als ze geweten hadden hoe het zat met dat tiende graadje, hadden ze vooruit geweten hoe het zou gaan. Maar hun waarnemingen kwamen niet dicht genoeg op elkaar of ze waren niet nauwkeurig genoeg en daardoor lijkt alles een ingreep van het toeval.

(uit het Frans vertaald door Dieuwke Eringa)

Poincaré was een van de grootste wiskundigen van zijn tijd, maar zijn ideeën over chaos werden nauwelijks opgepakt. Zo kwam het dat niet Poincaré maar Lorenz als 'vader van de chaostheorie' bekend kwam te staan.

Chaos is een verschijnsel dat al bij heel simpele systemen om zich heen kan grijpen. Je ziet het bijvoorbeeld als je een kaars hebt uitgeblazen: de rook wentelt zich in onvoorspel-

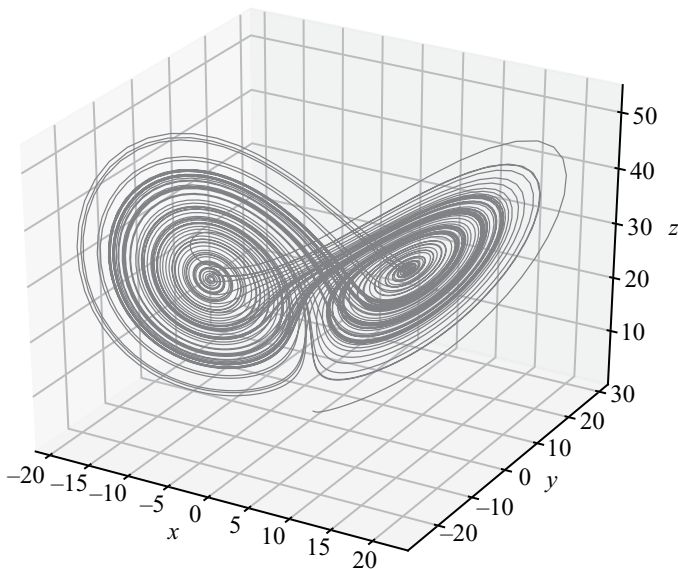
bare wervelingen. Of neem de beweging van een ‘dubbele slinger’: een slinger waar aan de onderkant met een scharnier een tweede slinger is gehangen. Geef je hem een zet, dan beweegt hij wild en onvoorspelbaar. Met toeval heeft het echter niks te maken; de slinger houdt zich aan strikt wiskundige regels. Chaotische systemen zijn deterministisch: een stel vergelijkingen beschrijft het systeem op een wiskundige manier en de startwaarde bepaalt de gehele verdere ontwikkeling van het systeem. Zou je bij de dubbele slinger een experiment kunnen herhalen vanuit precies dezelfde aanvangspositie en aanvangssnelheid, dan zou je precies hetzelfde slingerpatroon krijgen. Chaos betekent dat we, ondanks de deterministische wetten waaraan zo’n systeem gehoorzaamt, toch geen betrouwbare voorspellingen kunnen doen over de toekomstige ontwikkeling ervan, omdat kleine onnauwkeurigheden in onze kennis van de huidige toestand kunnen aanzwellen tot gigantische onnauwkeurigheden in de toekomst.



Na zijn ontdekking dat er chaos optreedt in zijn simpele weermodel met twaalf variabelen, vereenvoudigde Lorenz zijn model nog verder: hij bracht de atmosfeer terug tot een model met slechts drie differentiaalvergelijkingen en drie variabelen. Het had toen nóg minder met de werkelijkheid te maken, maar dat maakte hem niet uit. Lorenz hoopte zo nuttige inzichten in het chaotische gedrag van dynamische systemen te krijgen. De formules van Lorenz’ simpelste weermodel ogen eenvoudig:  $x' = -10x + 10y$ ,  $y' = 28x - y - xz$  en  $z' = xy - 8z/3$ . Volgens Lorenz zelf kun je de variabele  $x$  hierbij interpreteren als de intensiteit van convectiestromingen,  $y$  als het temperatuurverschil tussen op- en neerwaartse stromingen en  $z$  als de mate waarin de verticale temperatuurgradiënt (het verschil in

temperatuur in een ruimte op diverse hoogten) afwijkt van een lineaire gradiënt. Dit alles op een zeker tijdstip  $t$ . Met  $x'$ ,  $y'$  en  $z'$  worden de 'afgeleiden' bedoeld; zo is  $x'$  de mate van verandering van de intensiteit van convectiestromingen op tijdstip  $t$ .

Als je de drie variabelen  $x$ ,  $y$  en  $z$  als de coördinaten van een punt in de ruimte opvat, kun je de baan die dat punt in de loop van de tijd aflegt in een driedimensionaal assenstelsel weergeven. Je begint met een startwaarde en laat de computer duizenden iteraties uitvoeren. Er ontstaat dan een intrigerend patroon, dat iets weg heeft van een vlinder waarvan de twee vleugels op een gecompliceerde manier aan elkaar vastzitten:



De vleugels bestaan uit oneindig veel laagjes die door en over elkaar heen liggen. Het bewegende punt loopt nu eens over de ene vleugel, dan weer over de andere. Regelmaat is er niet, het aantal omlopen vóóordat het punt naar de andere vleugel over-

steekt, is volstrekt onvoorspelbaar. Aan het begin van het iteratieproces is van de vlindervorm nog niks te zien, maar na verloop van tijd begint die zich af te tekenen.

De gevoelige afhankelijkheid van de beginvoorwaarden laat zich ook prima illustreren. Laat je twee nabijgelegen punten tegelijkertijd vertrekken, dan volgen ze in het begin praktisch dezelfde baan. Ze bewegen zich samen in één vleugel, maar op een zeker moment zal één punt eruit worden geslingerd en zijn weg in de andere vleugel vervolgen, terwijl het andere punt nog even in de oorspronkelijke vleugel blijft. Beide punten gaan dan ieder huns weegs en bewandelen totaal verschillende paden op het vlinderoppervlak. Als je de begintoestand maar met beperkte nauwkeurigheid kent – wat bij atmosferische gegevens het geval is –, kun je de ontwikkelingen maar voor een beperkte tijd voorspellen.

De banen die met verschillende startwaarden worden beschreven, mogen volstrekt onvoorspelbaar zijn, structuurloos zijn ze niet: ze blijven netjes het gecompliceerde vlinderoppervlak volgen. Wiskundigen noemen dit oppervlak een ‘aan-trekker’: zelfs als de begintoestand er een eind vandaan ligt, zal de baan die het punt aflegt vroeg of laat worden opgeslokt door dezelfde vlinder. Het punt zit dan gevangen en zal eeuwig over de vleugels heen en weer blijven scheren.



In 1972 hield Lorenz een lezing tijdens de jaarvergadering van de Amerikaanse Academie van Wetenschappen in Washington. De voorzitter van die jaarvergadering had een titel nodig voor in het programmaboekje. Hij kon Lorenz niet bereiken en daarom bedacht hij er zelf één: ‘Voorspelbaarheid: kan de beweging van een vlindervleugel in Brazilië een tornado in Texas veroorzaken?’ Dit was overigens geen verwijzing naar

de vorm van de Lorenz-aantrekker. Wel heeft de ludieke titel geleid tot het woord ‘vlindereffect’, een metafoor voor chaos. Het is natuurlijk overdreven om één vlinder te beschouwen als de oorzaak van grote veranderingen die zijn klapperende vleugels in gang zet. De vleugelbeweging van één vlinder is slechts één bron van vele werveltjes in onze atmosfeer. Een heleboel gefladder, van miljoenen vlinders, zou heel veel kleine golfjes kunnen veroorzaken, die kunnen uitgroeien tot grote golven, die op hun beurt tot een storm kunnen leiden. Kortom, het weer wordt bepaald door het gecombineerde effect van heel veel kleine verstoringen.

In zijn lezing gaf Lorenz argumenten voor het plausible vermoeden dat het gedrag van de atmosfeer ‘instabiel’ is met betrekking tot de invloed van zulke kleine verstoringen. Met het woord ‘instabiel’ bedoelde hij net zoiets als wat er doorgaans gebeurt als je een voetbal op je hoofd laat balanceren. In 2016 kreeg Harrison Chinedu het voor elkaar om ruim honderd kilometer te fietsen met een bal op zijn hoofd, maar deze Nigeriaan is een uitzondering. Bij de meeste mensen zal de kleinste hoofdbeweging er onherroepelijk toe leiden dat de bal valt – een typisch voorbeeld van instabiliteit.

Het weer op aarde is een ingewikkeld dynamisch systeem, bezaaid met instabiele toestanden. Het rooskleurige toekomstbeeld dat Von Neumann in 1950 had – met snelle computers, nauwkeurige meetapparatuur en een fijnmazig raster moeten lange-termijnvoorspellingen van het weer mogelijk worden – was een illusie. Metingen zullen altijd een beperkte nauwkeurigheid houden en al liggen de roosterpunten van het raster nóg zo dicht bij elkaar, het blijft mogelijk dat een kleine depressie aan het meetnet ontsnapt. Sinds Lorenz weten we dat minieme meetfouten al desastreus kunnen uitpakken.

Het werk van Lorenz werd aanvankelijk nog niet echt seri-