

Inhoud in vogelvlucht

.....

Over de auteur	xvii
Dankwoord	xviii
Inleiding	1
Deel I: Beginnen bij het begin	7
Hoofdstuk 1: Het wiskundige gereedschap	9
Hoofdstuk 2: Tekens toekennen: positieve en negatieve getallen	21
Hoofdstuk 3: Breuken en decimalen	35
Hoofdstuk 4: Exponenten en wortels	53
Hoofdstuk 5: Bewerkingen in de juiste volgorde uitvoeren en je antwoord controleren	69
Hoofdstuk 6: Klaar voor de start	79
Deel II: Ontbinden in factoren	91
Hoofdstuk 7: Het nut van priemgetallen	93
Hoofdstuk 8: Eerlijk verdelen: haakjes wegwerken	101
Hoofdstuk 9: Eerstegraads ontbinden in factoren	123
Hoofdstuk 10: Ontbinden in factoren voor gevorderden	133
Hoofdstuk 11: Ontbinden in factoren in speciale gevallen	151
Deel III: Werken met vergelijkingen	161
Hoofdstuk 12: Op één lijn met lineaire vergelijkingen	163
Hoofdstuk 13: Lineaire vergelijkingen oplossen	173
Hoofdstuk 14: Kwadratische vergelijkingen kraken	195
Hoofdstuk 15: Zoek 't hogerop met vergelijkingen van hogere graad	215
Hoofdstuk 16: Ongelijkheden vaststellen	237
Deel IV: Algebra toepassen	257
Hoofdstuk 17: Stoeien met formules	259
Hoofdstuk 18: Vraagstukken oplossen	289
Hoofdstuk 19: Wiskunde zichtbaar maken: grafieken	315
Deel V: Het deel van de tientallen	343
Hoofdstuk 20: De tien meest gemaakte fouten	345
Hoofdstuk 21: Tien manieren om een polynoom te ontbinden in factoren	349
Hoofdstuk 22: Tien keer deelbaarheid	353
Hoofdstuk 23: Tien tips om vraagstukken op te lossen	357
Woordenlijst	361
Index	369

Inleiding

Even eerlijk zeggen: had je vanochtend toen je opstond gedacht dat je nu de inleiding van een boek over wiskunde, en over algebra in het bijzonder, zou zitten te lezen? Stond het bovenaan je verlanglijstje? Ik ben in ieder geval blij dat je dit leest, maar waarom eigenlijk?

Waarschijnlijk is één van de volgende situaties op jou van toepassing:

- ✓ Je bent in het diepe gesprongen en hebt dit boek gekocht.
- ✓ Je bladert het boek even door voordat je het besluit te kopen.

In beide gevallen heb je waarschijnlijk goede redenen om de moeite te nemen je te verdiepen in de wiskunde en te proberen haar te begrijpen.

Eén van de meest gestelde vragen tijdens de wiskundeles luidt: 'Waar is dit nu goed voor?' Sommige leraren zijn in staat hierop een goed en overtuigend antwoord te geven. Andere staren naar de grond en draaien er maar wat omheen. Mijn favoriete antwoord luidt: 'Algebra geeft je *macht*.' Algebra geeft je de macht om je met grotere dingen binnen de wiskunde bezig te houden. Algebra geeft je het gevoel dat jij iets weet wat je buurman niet weet. Algebra stelt je ook in staat een ander te helpen met wiskundige problemen of je kinderen de logica van wiskundige methoden uit te leggen. Algebra is een systeem van regels en symbolen dat universeel begrepen wordt, wat de gesproken taal ook is. De algebra geeft ons een duidelijke, methodologische werkwijze, die je van begin tot eind kunt begrijpen. Het is een instrument dat het beste werkt als je je aan de voorgeschreven regels houdt. Dat is nog eens macht!

Dit boek is niet geschreven als een detectiveroman met de clou aan het eind; je hoeft het niet van begin tot eind te lezen. Je kunt gewoon even spieken hoe het boek eindigt, zonder de rest van het verhaal te verpesten. Dit boek is verdeeld in een aantal algemene onderwerpen, van de grondbeginselen tot belangrijke methoden zoals het ontbinden in factoren, vergelijkingen en toepassingen. Ik heb geprobeerd veel voorbeelden te gebruiken, telkens weer een beetje anders, om zo elke keer een iets andere draai aan het onderwerp te geven. Om je te helpen deze voorbeelden goed te begrijpen worden ze stuk voor stuk duidelijk uitgelegd.

Het taalgebruik in dit boek is zowel begrijpelijk als wiskundig correct. Ik hoop dat je naast het *hoe*, het *waarom* zult leren. Vaak is het makkelijker iets te onthouden als je begrijpt waarom het zo werkt, dan wanneer je een betekenisloze volgorde van te doorlopen stappen uit je hoofd leert.

Over dit boek

Als je hulp kunt gebruiken met de basisregels van de algebra, dan kun je deze informatie in het eerste deel van dit boek vinden. Je kunt deze basisregels zien als de recepten die een kok nodig heeft. Je kunt geen soufflé bereiden zonder te weten dat je de eieren moet kloppen en dat je de oven op 200 graden moet zetten. Een goede voorbereiding is de basis voor het succes later. Het kan natuurlijk zijn dat je deze basisvaardigheden al onder de knie hebt. Fantastisch! Wat denk je dan van deel II?

In het tweede deel besteed ik veel aandacht aan het ontbinden in factoren. In feite is dat niet veel meer dan het uiterlijk van een vergelijking veranderen. En in de ontbonden vorm wordt alles met elkaar vermenigvuldigd. Kijk maar eens welke van de technieken om te ontbinden in factoren je zou moeten opruimen als je in de problemen komt met het oplossen van opgaven.

En nu vraag je je misschien af waar de vergelijkingen blijven. In deel III bespreek ik alle mogelijke vergelijkingen die je maar wilt, beginnend bij de eenvoudigste en eindigend met ingewikkelde. Meer regels en methoden worden geïntroduceerd als we ingewikkeldere vergelijkingen gaan behandelen. Voor de volledigheid bespreek ik ook ongelijkheden.

Deel IV houdt zich grotendeels bezig met de vraag: 'Waar is dit allemaal goed voor?' In deze hoofdstukken komen praktische toepassingen aan bod; daarbij gaat het dus om situaties die je uit het dagelijks leven kent.

Het deel van de tientallen dient als een leuk aantal lijstjes met weetjes. Misschien heb je er maar één van nodig of misschien vind je het leuk er zomaar eens doorheen te bladeren. Doe ermee wat je wilt.

Veel plezier. Zie dit boek als de 'Help'-knop op je computer. Als je een probleem hebt, kun je hierin het antwoord vinden (en hopelijk iets beter uitgelegd dan onder de Help-functie van sommige computerprogramma's).

Goede gewoonten

Je zult twee manieren tegenkomen om getallen weer te geven: in de beschrijvingen worden getallen onder de twintig en wiskundige beweringen (plusteken, minteken enzovoort) voluit geschreven. In sommen en voorbeelden gebruik ik echter de cijfers en symbolen. Dat is meestal makkelijker te lezen.

Specifieke wiskundige termen worden schuingedrukt en uitgelegd. Deze termen vind je ook in de woordenlijst achter in dit boek, zodat je ze makkelijk terug kunt vinden.

Om dingen duidelijk te maken, geef ik instructies vaak stap voor stap. Eerst leg ik dan de stappen in het algemeen uit en die licht ik vervolgens toe aan de hand van een aantal voorbeelden, zodat je een goed beeld krijgt van hoe de stappen in verschillende situaties gebruikt worden.

Let op deze pictogrammen

De rare kleine tekeningetjes die je in de kantlijn van dit boek ziet, maken je attent op bepaalde stukken tekst. De pictogrammen die ik in dit boek gebruik, zijn:



Dit zijn de basisregels van de wiskunde (of van de algebra in het bijzonder), die je in acht moet nemen om ervoor te zorgen dat alles klopt. Je kunt ze eenvoudigweg niet veranderen of negeren.



In deze paragrafen, vaak in grijze kaderteksten, kom je feitjes tegen die je misschien interessant vindt, maar die je verder niet hoeft te weten. Deze weetjes zijn onbelangrijk, maar ze maken de wiskunde wat minder onpersoonlijk en abstract.



Deze paragrafen verduidelijken een symbool of een methode. Soms bespreek ik het onderwerp ook in een ander deel van het boek, of soms herinner ik je alleen aan een algemene wiskundige regel. Als het al een tijdje geleden is dat je naar school bent geweest, kom je er misschien achter dat de naam van sommige methoden is veranderd.



Hier vind je een definitie of een verduidelijking van een bepaalde stap in een methode, een technische term of een uitdrukking.



De informatie die je naast dit pictogram vindt, is niet van levensbelang, maar kan wel helpen het leven wat gemakkelijker te maken. Dat wil zeggen, je leven in de wiskunde althans.



Dit pictogram waarschuwt je voor iets wat erg lastig kan zijn. Er worden veel fouten gemaakt bij de methode of het onderwerp dat naast dit pictogram besproken wordt. Vandaar dat ik je op deze manier om extra aandacht vraag.

Wat je niet hoeft te lezen

Je kunt een hoop leren van dit boek door gewoon van pictogram naar pictogram te springen. De teksten naast het pictogram Wiskundige Regels geven een goede bondige samenvatting. En als je meer details wilt weten, lees je de tekst tussen de pictogrammen.

De tekst in de kaders (die kleine grijze blokken) bevatten veel historische feiten; het leven van veel wiskundigen is dan wel niet zo spannend om er een film over te maken, maar er zijn wiskundigen die toch vrij interessante dingen hebben gedaan. En er staan een paar van mijn favoriete anekdotes en verhaaltjes tussen, die je zo nu en dan wat afleiding bieden. Je kunt ze gemakkelijk los van de rest van het boek lezen.

Vreemde veronderstellingen

Ik ga er niet van uit dat je net zo gek bent op wiskunde als ik; misschien ben je er nog wel gekker op! Ik ga er wel van uit dat je een doel voor ogen hebt; je vaardigheden wat bijspijkeren, je geheugen wat opfrissen of gewoon een leuk boek lezen. Ik neem ook aan dat je al wel eens wat ervaring hebt opgedaan met wiskunde. Een jaartje wiskunde op school bijvoorbeeld, of misschien een cursus die je lang geleden hebt gevolgd, of misschien ben je alleen met enkele concepten in aanraking gekomen.

Als je in Nederland of België naar school bent geweest, heb je waarschijnlijk algebra gehad in de lessen wiskunde. Waarschijnlijk kun je net als ik ook nog wel je eerste (of enige) wiskundeleraar herinneren. Ik herinner me nog wel dat Meneer Schaffelaar zei: 'Dit is een *n*.' Mijn hele wereld van getallen die ik kende stortte plotseling in elkaar. Misschien verdiep je je nu opnieuw in de wiskunde om die lang geleden opgedane kennis weer wat op te frissen. Misschien komt je zoon of dochter wel thuis met huiswerkopgaven, die je ook niet meer kunt oplossen. Geen nood, hulp is onderweg!

Hoe dit boek is georganiseerd

Hoe vind je snel en gemakkelijk de informatie die je nodig hebt? In de verschillende delen behandelt dit boek de meest besproken en bestudeerde concepten uit de algebra.

Deel 1: Beginnen bij het begin

De 'voorvaders' van de wiskunde baseerden hun regels op de veronderstelling dat iedereen het eerst over een aantal zaken *eens* zou zijn. In het taalgebruik zijn we het er bijvoorbeeld allemaal over eens dat het Nederlandse woord *goed* altijd dezelfde betekenis heeft wanneer het wordt gebruikt. Hetzelfde geldt voor de wiskunde. Iedereen gebruikt dezelfde regels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, breuken, exponenten enzovoort. Algebra zou niet werken als verschillende mensen verschillende regels zouden hanteren. We zouden dan niet met elkaar kunnen communiceren. Dit deel geeft je een overzicht van deze basisregels, waarover iedereen het in de loop der jaren eens is geworden.

Je vindt hier de basisregels van de rekenkunde, van breuken, machten en getallen met een voorteken. Deze instrumenten heb je nodig om de stof die later aan bod komt te kunnen begrijpen. Het overzicht van wiskundige basisregels behandelt vooral de meest gebruikte algebraïsche methoden. Je kunt ook terugbladeren naar deze hoofdstukken wanneer je die bij het bestuderen van de stof verderop nodig hebt.

In deze eerste hoofdstukken introduceer ik je in de wereld van letters en symbolen. Het gebruik van getallen en symbolen bestuderen is alsof je

een vreemde taal leert. Er is een vocabulaire, er zijn veelgebruikte zegswijzen en verschillende cultureel bepaalde toepassingen. De taal is het eerste dat je nodig hebt om aan een verdere studie te beginnen.

Deel II: Ontbinden in factoren

Deel II gaat over het ontbinden in factoren en vereenvoudigen van vergelijkingen. Er zijn maar weinig methoden in de algebra die belangrijker zijn dan ontbinden in factoren. Het is een manier om vergelijkingen te herschrijven zodat ze gemakkelijker op te lossen zijn. Door te ontbinden in factoren verander je een vergelijking van een optelling of aftrekking, in een vermenigvuldiging of een deling. De makkelijkste manier om veel opgaven op te lossen is door gebruik te maken van de wonderlijke vermenigvuldigingseigenschappen van het getal nul. Waar het feitelijk op neer komt, is dat iets vermenigvuldigd met nul altijd nul oplevert. Dat klinkt eenvoudig, maar het is werkelijk fantastisch.

Soms kun je heel eenvoudig ontbinden in factoren als je een bepaalde gelijkenis herkent. Er zijn ook ingewikkeldere methoden om te ontbinden in factoren, waarbij je niet alleen een patroon moet herkennen maar ook moet weten welke regel je moet gebruiken. Maar maak je geen zorgen, ik help je bij het herkennen van al deze verschillende gevallen.

Deel III: Werken met vergelijkingen

Hier leer je alle details over het vinden van uitkomsten. Sommige methoden om vergelijkingen op te lossen zijn elegant; sommige zijn minder elegant. Ik laat je een heleboel verschillende soorten vergelijkingen zien en vele manieren om die op te lossen. Meestal geef ik je één methode om elk type vergelijking op te lossen, maar als het nuttig is, leer ik je ook alternatieven, zodat je zelf kunt zien dat sommige methoden beter werken dan andere.

Deel IV: Algebra toepassen

Wat het nut is van de algebra vind je in dit deel. Je hebt alledaagse formules en niet zo alledaagse formules. Met sommige situaties ben je bekend, met andere ben je minder of helemaal niet bekend. Ik heb niet de ruimte om je elk mogelijk probleem te laten zien, maar ik geef je voldoende praktische toepassingen en patronen om je voor te bereiden op bijna elke situatie die je kunt tegenkomen.

Deel V: Het deel van de tientallen

Hier laat ik je de tien meest gemaakte fouten uit de algebra zien, de tien manieren om een kwadratische vergelijking te ontbinden in factoren, tien van de meest gebruikte regels om deelbaarheid aan te tonen en tien stappen om een verhalend vraagstuk op te lossen. Dit zijn leuke lijstjes die je

als checklist kunt gebruiken. Als je de details wilt weten, blader je terug naar het hoofddeelte van het boek.

Aan het einde van het boek vind je ook nog een woordenlijst en een lijst met wiskundige termen.

Quo vadis

Als je je basisvaardigheden wilt opfrissen of je wiskundige vertrouwen wilt opkrikken, begin dan met deel I. Als je er klaar voor bent om het ontbinden in factoren te oefenen en wilt weten welke methoden je daarvoor het beste kunt gebruiken, ga dan naar deel II. Deel III is voor diegenen die vergelijkingen willen gaan oplossen; je kunt je daar uitleven op zo'n beetje elk soort vergelijking. In deel IV wordt het pas echt leuk; hier gaat het over toepassingen en wat je allemaal met je oplossingen kunt doen. De lijsten in deel V bekijk je meestal pas nadat je een van de andere delen van het boek hebt gelezen, maar je kunt er natuurlijk ook meteen aan beginnen. Het is een leuk onderdeel van het boek!

Algebra oefent je ook in logisch nadenken. Als je ouder wordt, blijf je alerter en beter 'bij' naarmate je je hersencellen meer traint. 'Wat niet gebruikt wordt, gaat langzaam verloren', geldt ook voor de hersenen. Waarom zou je ze dus hier niet voor gebruiken?

De beste reden om de algebra te bestuderen is om de schoonheid ervan. Ja, dat lees je goed. Algebra is poëtisch, diepzinnig en vol artistieke uitdrukking. Kijk maar en je zult het zelf zien. En vergeet niet dat het je macht geeft.

Welkom in de wereld van de algebra! Geniet ervan!

Deel I

Beginnen bij het begin

The 5th Wave

By Rich Tennant

© RICH TENNANT

*We kunnen de pizza niet opeten voordat
Jan-Peter de verhouding tussen de 3 kleine
en de 2 grote stukken heeft bepaald.*



In dit deel...

Wie van jullie kan gewoon opstaan uit zijn stoel en van het ene op het andere moment op reis gaan naar een ver land? Dat kunnen maar weinig mensen. Je moet je eerst voorbereiden. Je moet eerst je paspoort laten verlengen, een visum aanvragen, je koffers pakken en iemand regelen die voor de kat zorgt. Een goede voorbereiding is de beste garantie voor een geslaagde reis.

Hetzelfde geldt voor wiskunde: met een goede voorbereiding gaat het stukken beter. Een gedegen voorbereiding voorkomt problemen later. In dit deel vind je de basisbeginselen die je nodig hebt voor een geslaagde reis.

Hoofdstuk 1

Het wiskundige gereedschap

.....

In dit hoofdstuk:

- ▶ De basiseenheden: getallen
 - ▶ De belangrijkste spelers: variabelen en tekens
 - ▶ Termen en bewerkingen bij elkaar voegen
 - ▶ Speel het spel volgens de regels
-

Waarschijnlijk heb je het woord *algebra* wel eens gehoord en waarschijnlijk weet je wel dat het iets met wiskunde te maken heeft. Misschien herinner je je ook nog dat de wiskunde zo uitgebreid is dat er op school twee vakken aan gewijd werden: Wiskunde A en Wiskunde B. Maar wat is algebra eigenlijk? En waar wordt het voor gebruikt?

In dit hoofdstuk worden deze vragen beantwoord en krijg je een overzicht van de bijdragen aan de ontwikkeling van de algebra. Je leert hier ook waar algebra goed voor is en wat je nodig hebt om ermee te werken.

In een notendop is *algebra* een algemenere manier om de rekenkunde uit te drukken. Door gebruik te maken van variabelen, die elke willekeurige waarde kunnen aannemen in een formule, kunnen deze algemene formules toegepast worden op alle getallen. De algebra gebruikt positieve en negatieve getallen, gehele getallen, breuken, operatoren en symbolen om de relaties tussen waarden te analyseren. Het is een systematische benadering om de relaties tussen getallen weer te geven en daarbij geldt een aantal specifieke regels.



Zo geeft de formule $a \times 0 = 0$ bijvoorbeeld weer dat elk willekeurig reëel getal, hier aangeduid met a , vermenigvuldigd met nul gelijk is aan nul. (Zie hoofdstuk 14 voor meer informatie over het vermenigvuldigen met nul.)

Door x te gebruiken om het getal twee keer te geven, kun je in de algebra $x + x + x = 6$ bijvoorbeeld weergeven met de formule $3x = 6$.

‘Leuk en aardig allemaal,’ denk je nu misschien, ‘maar is dat nu allemaal wel nodig, getallen vervangen door letters en zo?’ Nou, ja dus. Vroegere wiskundigen bedachten dat problemen vereenvoudigd konden worden