Wiskunde voor in bed, op het toilet of in bad

Simon Koolstra

BBNC cadeau

BBNC uitgevers
Amersfoort, 2015

Inhoud

1.

Wat is wiskunde?

Wat is wiskunde? Die vraag kan ik moeilijk in één zin beantwoorden. Tegenwoordig denken veel mensen bij wiskunde aan het maken van rekensommetjes. Optellen, aftrekken, delen, vermenigvuldigen, dat soort dingen, dat zou nou wiskunde zijn. In zekere zin hebben ze het niet eens helemaal bij het verkeerde eind! De allereerste wiskunde is waarschijnlijk ontstaan uit de behoefte van de mens om te kunnen rekenen, duizenden jaren geleden. Maar de moderne wiskunde is veel en veel meer dan dat. Het begon met rekenen, maar door de eeuwen heen is de wiskunde op fantastische manieren gegroeid. De lijst van onderwerpen waar professionele wiskundigen zich vandaag de dag mee bezighouden, is vrijwel onuitputtelijk en varieert van het ontwerpen van modellen om het weer of de economie te begrijpen tot het bestuderen van abstracte objecten, zoals de 196.884-dimensionale 'Monstergroep'. Maar ik loop op de zaken vooruit. Het begin van de wiskunde had gewoon te maken met getallen.

Toen mensen leerden om met aantallen om te gaan, waren ze eigenlijk voor het eerst bezig met wiskunde. Getallen zien we tegenwoordig overal om ons heen. Tijd wordt aangegeven in getallen, het geld dat je op je rekening hebt staan is een getal, cijfers op school, prijskaartjes in de winkels, de lijst gaat maar door. Denk je eens in hoe moeilijk het dagelijks leven zou zijn zonder het basale begrip van getallen! Toch is het werken met getallen niet zo natuurlijk als je misschien denkt. Er hebben beschavingen bestaan, die in hun taal maar drie telwoorden hadden: één, twee en veel. Onderscheid tussen drie en vier hadden ze bijvoorbeeld niet. Dat was allebei 'veel'. Zelfs de simpelste transacties zouden voor deze mensen moeilijk uit te

drukken zijn! ‘Wat wil je voor zo’n vis?’ ‘Doe maar twee broden.’ ‘Oké, ik wil graag twee vissen.’ ‘Dat wordt dan, euh … veel broden alstublieft.’ De visser en de bakker moeten flink in de war zijn geraakt! Het is dan ook niet vreemd dat men systemen begon te bedenken om met grotere getallen om te gaan. In het hoofdstuk ‘Getalstelsels’ kun je lezen hoe verschillende oude beschavingen dat deden en kom je erachter waarom ons systeem praktischer is dan dat van de Romeinen. Langzamerhand leerde men de getallen steeds beter begrijpen. In het hoofdstuk ‘Breuken en irrationaliteit’ vind je hoe de Egyptenaren als eerste met breuken begonnen te rekenen en de Grieken later ontdekten dat je met breuken nog niet alle getallen kon beschrijven. In het hoofdstuk over nul zul je, misschien tot je verbazing, ontdekken dat noch de oude Egyptenaren, noch de oude Grieken het getal nul kenden. Zelfs het mysterieuze getal pi, waarover je kunt lezen in het gelijknamige hoofdstuk, was eerder bekend dan het getal nul! In het hoofdstuk over priemgetallen kun je lezen waarom deze ook wel de ‘bouwblokken van het getalsysteem’ worden genoemd en in het hoofdstuk over complexe getallen zul je zien dat we nog een extra klasse van getallen nodig hebben om sommige problemen op te lossen. Er zijn tegenwoordig nog altijd wiskundigen die de getallen onderzoeken. Deze getaltheoreten proberen nog altijd meer en meer geheimen van de wereld van de getallen te ontrafelen.
Getallen zijn inderdaad belangrijk binnen de wiskunde, maar als wiskundigen alleen maar met getallen werkten, dan had ik de vraag van dit hoofdstuk in één zin kunnen beantwoorden: ‘wiskunde is getallenleer’. Helaas, of eigenlijk gelukkig, volstaat dat antwoord niet. In het hoofdstuk ‘Meetkunde’ kun je lezen hoe wiskundigen geïnteresseerd raakten in de studie van vormen, positie en afmetingen. De oude Grieken begonnen bewijzen te leveren van eigenschappen van driehoeken, cir-

kels, kubussen en allerlei andere meetkundige objecten. De stelling van Pythagoras, waar ook een hoofdstuk over te vinden is, is misschien wel het bekendste voorbeeld van zo'n algemene eigenschap, waarvoor de Griekse wiskundigen een bewijs gaven. In het hoofdstuk 'Bewijzen' kun je lezen hoe de liefde van de Grieken voor logisch opgebouwde redeneringen het begin was van de wiskunde zoals die nu wordt bedreven. Dit maakte hen ook de grondleggers van de moderne logica, de wetenschap van het logisch argumenteren, zoals je kunt lezen in het hoofdstuk over wiskundige logica.

Verdere ontwikkeling van de wiskunde in West-Europa kwam pas na de middeleeuwen van de grond. Na de glorietijd van Griekenland gebeurde er in Europa honderden jaren weinig in de exacte wetenschappen. Door het boek *Liber Abaci* van de Italiaanse wetenschapper Leonardo Fibonacci maakte Europa in 1202 kennis met het getal nul en het decimale stelsel dat we vandaag nog steeds gebruiken. Sindsdien begon de interesse in wiskunde weer te groeien. Wiskunde werd niet alleen meer bestudeerd om haar praktische toepassingen, maar werd net als bij de Grieken gewaardeerd als een studieonderwerp op zich. Men interesseerde zich in het oplossen van vergelijkingen en bekwaamde zich erin om steeds abstractere situaties te kunnen beschrijven en begrijpen. Hieruit werden nieuwe, abstractere onderzoeksgebieden ontwikkeld. In het hoofdstuk over dimensies kun je lezen dat de aandacht zich verplaatste van twee- of driedimensionale werelden, zoals die om ons heen, naar vier- of meerdimensionale ruimtes en soms zelfs oneindig dimensionale ruimtes! Wiskundige onderwerpen als groepentheorie, ook wel aangeduid als de studie van symmetrie, topologie, ook wel de studie van vormen, en Galoistheorie zijn typisch van dit soort moderne, abstracte onderwerpen. Verrassend genoeg blijken ook deze theorieën soms heel handig bij het oplossen van 'echte' problemen, zoals je zult ontdekken als je de hoofdstukken hierover leest. Maar ook onderwerpen als de kansrekening en de calculus, die misschien wat grijpbaarder zijn, raakten vanaf de zeventiende eeuw in een stroomversnelling.

Zelf zie ik de wiskunde graag als de wetenschap van zekerheden. Wiskundigen proberen de patronen van getallen, vormen, functies en andere wiskundige objecten te vinden en te beschrijven. Dit doen ze aan de hand van strakke definities, duidelijke regels en onwrikbare stellingen. Wiskundigen zijn begonnen met een aantal aannamen en regels en bouwden daaruit een wiskundig bouwwerk dat noodzakelijk volgde uit de vooraf aangenomen stellingen. Het mooie voor velen, en ook voor mij, is dat een wiskundig bewijs, als het correct en volledig is beschreven, voor altijd waar is. Theorieën en conclusies in de natuurkunde, over de economie, of over de menselijke geest bijvoorbeeld, kunnen staan of vallen met nieuwe experimenten en onderzoeken. Een bewezen wiskundige stelling blijft echter altijd overeind. De stelling van Pythagoras, die meer dan tweeduizend jaar geleden werd bewezen, is vandaag de dag niet minder waar dan zij bij de Grieken was. Dit boek kan je helpen om te begrijpen waar wiskunde over gaat. Je komt beroemde problemen uit de wiskunde tegen, zoals het vermoeden van Kepler, de Riemannhypothese en het raadsel van Achilles en de schildpad. Grote triomfen passeren de revue met het bewijs van de vierkleurenstelling en de onvolledigheidsstellingen van Kurt Gödel. Je komt wiskundige paradoxen tegen, zoals die van Russell en die van Littlewood en Ross. Maar ook het belang van de wiskunde voor de moderne maatschappij zie je terug, bijvoorbeeld in de hoofdstukken over cryptografie en de exponentiële groei.

Wat is wiskunde? Ik kan geen eenduidig antwoord geven, maar wees ervan overtuigd dat het niet zomaar rekenen is! Dat is het al meer dan vijfduizend jaar niet meer. Wiskunde is een rijke, veelzijdige wetenschap die al duizenden jaren wordt onderzocht, groeit en steeds bijzonderder wordt. Wiskunde is spannend, het fascineert en het helpt ons verder.

2.

Het getal nul

Probeer je eens voor de geest te halen hoe je als kind voor het eerst wiskunde begon te leren. Waarschijnlijk begon het allemaal met tellen. Dat bleek al een hele kunst. Je hebt één huis, twee ouders, drie koekjes in de trommel en zo leerde je de getallen kennen. Ook leerde je getallen optellen en aftrekken. Als ik drie koekjes heb en mijn vriendje geeft me er nog een, dan heb ik vier koekjes. Als ik er dan twee opeet, heb ik er nog maar twee. Maar wat nou als ik besluit ook de laatste twee koekjes op te eten? Natuurlijk heb je dan helemaal geen koekjes meer: je houdt niets over. Maar het getal dat hierbij hoort, het áántal koekjes dat je nog hebt? Dat is het getal 0 en de wiskunde achter 0 bleek moeilijker dan je zou denken. Zo moeilijk, dat het wiskundigen eeuwenlang heeft geplaagd.
Tegenwoordig kent iedereen het getal nul. Al vroeg op de basisschool leren kinderen wat het getal precies inhoudt en worden er rekenoefeningetjes met nul gemaakt. Makkelijk, vinden de meesten, want het optellen en vermenigvuldigen met nul levert niet zulke verrassende resultaten op: nul bij een getal optellen verandert niets en iets vermenigvuldigen met nul geeft altijd nul. Toch blijkt uit de geschiedenis van nul dat het concept 'nul', een getal dat 'niets' aangeeft, en zelfs het rekenen hiermee lang niet zo makkelijk is als het tegenwoordig lijkt. In tijden waarin getallen nog lang niet zo prominent aanwezig waren als tegenwoordig, hebben wiskundigen en filosofen veel geworsteld met de hoeveelheid van 'niets'. Waarom heb je het getal nul eigenlijk nodig? Een lege kist is leeg! Daarvan hoef je de inhoud toch helemaal niet te tellen? En wat gebeurt er bijvoorbeeld als je een getal aftrekt van nul? Dan bevind je je ineens in het domein van de negatieve getal-

len, maar wat telt een negatief getal? En dan een van de moeilijkste problemen uit de geschiedenis van nul: wat gebeurt er eigenlijk als je een getal wilt delen door nul? Hoe vaak gaat een aantal van nul appels in tien appels? De wiskunde en filosofie achter nul blijken niet niets te zijn!

De eerste keer dat de nul in de geschiedenis van de wiskunde voorkomt, is bij de Babyloniërs rond 2000 voor Christus. De Babyloniërs werkten met een getalsysteem dat ze hadden overgenomen van de Akkadiërs, die het rond 2500 voor Christus weer hadden overgenomen van de Soemeriërs, een volk dat in het huidige Zuidoost-Irak leefde. In dit getalsysteem gaf de positie van een symbool de symboolwaarde aan. Deze methode lijkt erg op de getalsystemen die vandaag nog worden gebruikt: de 1 in 515 geeft aan dat er één tiental is (bij de vijf honderdtallen en vijf eenheden), maar de 1 in 2100 staat op een andere positie en geeft het aantal honderdtallen aan. In het systeem van de Babyloniërs ontbrak er echter een manier om ontbrekende waarden aan te geven, zoals de nullen in 2100 aangeven dat er geen tientallen en eenheden voorkomen in het getal. In plaats daarvan gebruikte men in het Babylonische Rijk lege ruimte om dit duidelijk te maken. Zoals je je misschien kunt voorstellen, leidde dit hier en daar tot wat onduidelijkheden. Soms veroorzaakte een wijdere lege ruimte discussie over hoeveel nullen het moest voorstellen, maar ook waren er problemen met lege ruimte aan het einde van een getal. Om dit op te lossen, voerden de Babyloniërs een symbool in om deze ruimte op te vullen. Een teken dat 'niets' betekent, maar wel aangeeft dat er op die plek ook niets hoort te staan. Losstaand werd deze eerste versie van nul nog niet gezien als een getal, maar het bleek wel de voorloper te worden van het getal dat wij vandaag de dag gebruiken.

Na de Babyloniërs bleef het lang stil rond het getal nul. De Egyptenaren vonden het geen probleem om het niets niet te kunnen tellen. De Grieken, die voornamelijk met lengten en vormen werkten, kenden geen voorwerpen die geen lengte hadden en maakten zich dus ook niet druk om een lengte van nul. Zelfs de latere Romeinen, met hun ingewikkelde getalsysteem met I's,V's en X'en, hadden geen aanduiding voor het aantal appels in een lege kist. Pas in de zevende eeuw herpakt het verhaal van de nul zich. Rond 650 waren de Indiërs ver ontwikkeld op het gebied van de wiskunde. Het was een van de Indische wiskundigen, Brahmagupta genaamd, die voor het eerst rekenregels opstelde voor negatieve getallen en voor nul. Brahmagupta schreef een boek waarin hij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met nul uitlegde. Negatieve getallen noemde hij 'schulden' en nul was het getal dat je kreeg als je al je schulden had afgelost, of je hele fortuin moest afbetalen aan schulden. Hij was de eerste die 0 als een volwaardig getal beschouwde en er ook op deze manier mee begon te rekenen. Hij legde hiermee de basis voor het getal nul zoals we het nu kennen.

Aan het einde van de achtste eeuw, rond 770, bereikte de ontdekking van Brahmagupta de Arabische wereld. Hier werd het getal nul verder ontwikkeld tot de moderne vorm en is ook het getalsysteem zoals wij dat nu kennen tot stand gekomen. Het duurde echter nog een paar honderd jaar voordat ook Europa kennismaakte met nul. Het eerste Europese werk waarin nul wordt beschreven, is de *Liber Abaci* van de Italiaanse wiskundige Leonardo Fibonacci uit 1202. Al snel realiseerden kooplui, wiskundigen en andere wetenschappers die het boek van Fibonacci lazen, zich het nut en het belang van een getal om 'niets' aan te geven en ontdekten zij het gemak waarmee je negatieve getallen kunt gebruiken om schulden en leningen bij te houden. Hoewel het nieuwe getal hier en daar nog werd gewantrouwd (voornamelijk door regeringen, die het eng vonden hoe makkelijk een nul minder of meer hun belastinginkomsten kon beïnvloeden), raakte de nul ingeburgerd in de Europese maatschappij.

In de eeuwen die volgden op de *Liber Abaci* raakte Europa gewend aan een getal dat het aantal appels in een lege doos aangeeft. Het belang van nul als plaatshouder in het getalsysteem, als scheiding tussen de positieve en negatieve getallen en als getal op zich werd niet langer onderschat en door heel Europa werd nul onmisbaar in het dagelijks gebruik. Ook rekenen met nul kreeg men grotendeels snel onder de knie. Optellen, vermenigvuldigen en aftrekken waren simpel, maar delen door nul bleef nog een moeilijk punt. Nog altijd zijn wiskundigen het erover eens dat écht delen door nul niet mogelijk is. Je kunt een kist je hele leven lang met niets blijven vullen, maar dan nog zullen er geen tien appels in verschijnen! Het aantal keer dat nul appels in tien appels gaat, is dus niet aan te geven. Wel bedachten twee grootheden op het gebied van de wiskunde, Sir Isaac Newton en Gottfried Wilhelm von Leibniz, in de zeventiende eeuw onafhankelijk van elkaar een manier om een dergelijke operatie te benaderen. Met hun ontdekking van het 'delen door steeds kleinere getallen' ontwikkelden ze een nieuwe tak van wiskunde die bekend is geworden als de calculus. Het verhaal van de calculus, die onmisbaar is voor de economie, de natuurkunde en de sterrenkunde bijvoorbeeld, is echter een verhaal voor een andere keer. De uitvinding van het getal nul door Brahmagupta was een grote stap binnen de wiskunde. Tegenwoordig hebben we het over temperaturen van 'nul graden Celsius', 'nullijnen' en kennen we het 'nulurencontract'. Nul mag dan 'niets' betekenen en de pracht en het vernuft van het aantal appels in een lege kist kan je makkelijk ontgaan, maar zowel binnen de wiskunde als daarbuiten is het getal nul alleen in zijn soort en van het grootste belang.