

Wiskunde A, B, C en D op vwo-niveau

***Algebra-analyse-meetekunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica-perspectief-
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen***

Over dit boek

Deze nieuwe uitgave ' *Wiskunde A,B,C en D op vwo-niveau* ' behandelt alle hoofdonderdelen van de wiskunde van het moderne vwo. Het is speciaal bedoeld voor studenten van het vwo die zich degelijk willen voorbereiden op hun examen, of op een academische studie, maar zeker ook voor allen die na een eerdere opleiding op vwo- of gelijkwaardig niveau, hun wiskundekennis willen opfrissen en/of uitbreiden met voor hen onbekende onderwerpen. De geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter verduidelijking van de direct eraan voorafgaande theorie. Vooral daardoor kunt u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof (weer) eigen maken en raakt u niet gedemotiveerd omdat 'het allemaal niet opschiet' vanwege de schier eindeloze series opgaven zoals die, natuurlijk terecht, in alle bestaande methoden en lesboeken staan. ' *Wiskunde Leren, is wiskunde doen* ' was immers het motto van Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de 'Mozart van de Wiskunde'. Maar dit boek is eerder 'naslagwerk en uitgebreid vademecum', dan 'leer- en sommenboek'. Het is daartoe duidelijk gerubriceerd middels een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, waardoor u snel de voor u meest interessante onderwerpen kunt terugvinden. Daar waar bewijzen van stellingen of afleidingen van formules wat saai of triviaal zouden overkomen na de direct eraan voorafgaande, is een kleiner lettertype gebruikt, ten teken dat ze voor het begrip zelf verder van ondergeschikt belang zijn. Overigens zijn alle bewijzen van stellingen en algoritmen zeker ook bedoeld om 'sommenervaring' op te doen voor het oplossen van wiskundige vraagstukken.

Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR), die ook, zeker na de in onbruik geraakte logaritmetafel, gonio-tabellen, rekenliniaal, ... , onmisbaar werd in de wiskunde, wordt in dit boek, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen al eerder voor de TI-83 van 'Texas Instruments', vrijwel identiek met de nieuwere, soms wat handiger, TI-84. De GR van 'Casio' is m.i. overigens minstens even goed bruikbaar.



Over de auteur

Wim Gronloh, geboren in Amsterdam, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica). Schreef in 1998 de wiskundemethode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en HAVO/ vwo en publiceert sedert 2006 boeken voor het vwo en HAVO.

Bij deze nieuwe uitgave.

'Wiskunde A, B, C en D op vwo-niveau' omvat hoofdzakelijk de stof van de uitgave 'Wiskunde van A tot D voor het vwo - helder en exact' maar is een volledige herziening daarvan.

Behalve verduidelijkingen van tekst en sommige figuren, zijn hier en daar ook enkele errata verwerkt, mede dankzij een zeer attente lezer.

Ik hoop dat deze uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen en houd me voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Wim Gronloh

e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl

Bussum, zomer 2020

Inhoud

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1- 42
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Vierkantsvergelijking	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	7
4. Machtsfuncties	9
a. Grafieken	10
b. Transformaties	11
- Transformaties door translatie	11
- Transformaties door vermenigvuldiging	13
- Transformaties van wortelvormen	14
5. Exponentiële functies	15
- Exponentiële groei	16
6. Gebroken rationale functies	18
7. Grafieken van exponentiële functies	20
8. Logaritmische functies	21
a. logaritme van een getal	21
b. Eigenschappen van logaritmen	22
c. Inverse functies	22
9. Goniometrische functies	24
a. Definities in de eenheidscirkel	24
b. De radiaal	25
c. Herleidingformules	25
- sinus en cosinus van som en verschil	26
- verdubbeling- en halveringsformules	27
- formules van Simpson	27
d. Sinus- en cosinusregel	28
- sinusregel	28
- cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras')	29
10. Periodieke functies	30
a. Sinusfunctie	30
b. Cosinusfunctie	32
c. Tangensfunctie	33
d. Exacte standaardwaarden van sinus x en cosinus x .	34
e. Sinusoïden	35

IV

11. Limieten en continuïteit van functies	37
a. Continuïteit van een functie	37
b. Rekenregels voor limieten	38
c. Rechter- en linkerlimiet	39
d. Existentie van limieten	39
e. Opgaven	41
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	43- 60
1. Gelijkheden en ongelijkheden	43
2. Oplossen van vergelijkingen	45
a. Lineaire stelsels	45
b. Tweedegraads vergelijkingen	47
- ontbinden in factoren	48
- kwadraatafsplitsing	49
- de abc -formule	49
c. Hogeregraads vergelijkingen	50
- de vergelijking $x^3 = 1$	51
- de vergelijking $x^3 = -1$	52
d. Exponentiële vergelijkingen	52
e. Logaritmische vergelijkingen	54
f. Goniometrische vergelijkingen	57
- $\sin A = p$, $\cos A = p$	57
- $\sin A = \sin B$, $\cos A = \cos B$	58- 59
- $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$	59
III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES	61-78
1. Groeisnelheid	61
2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie	62
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	63
4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden	64
a. Stijgend en dalende functies	64
b. Convexe en concave kromming	65
c. Extreme waarden	66
- voorwaarden voor een lokaal extreem	66
d. Buigpunten	67
5. Regels bij het differentiëren	68
a. Factorregel	68
b. Somregel	68
c. Productregel	69
d. Quotiëntregel	69
6. Afgeleiden van elementaire functies	70
a. Afgeleide van een machtsfuncties	

b. Goniometrische functies	71
- afgeleide van sinus x en cosinus x	72
- afgeleide van tangens x	72
c. Afgeleiden van e -machten	73
d. De kettingregel	73
e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies	74
- exponentiële functies	74
- logaritmische functies	75
f. Afgeleiden van samengestelde functies	76
7. Praktische toepassingen van differentiaalrekening	77
 IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES	 79- 96
1. Oppervlakte en integraal	79
2. Integreren en stamprimitieven	81
a. Integreren	81
b. Stamprimitieven	82
c. Rekenregels bij het integreren	83
d. Bepaalde- en onbepaalde integralen	86
3. Substitutiemethode en partieel integreren	86
a. Substitutiemethode	86
b.. Partiële integratie	87
4. Toepassingen van de integraalrekening in de meetkunde	88
a. Lengte van een kromme	88
b. Oppervlakte tussen twee krommen	89
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	89
- inhoud van een cilinder	90
- inhoud van een kegel	90
- inhoud van een bol	90
- inhoud van een omwentelingsellipsoïde	91
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	94
- oppervlakte van een bol	95
- oppervlakte van een paraboloid	95
- oppervlakte van een hyperboloid	96
 V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	 97- 114
1. Driehoek van Pascal	97
- Binomium van Newton	99
- Routes in een rooster	100
2. Kansexperimenten	101
a. Somregel	101
b. Productregel	101
c. Complementregel	102

VI

3. Permutaties, variaties en combinaties	103
a. Permutaties	103
b. Variaties	103
c. Combinaties	104
4. Onderscheid bij kansproblemen	105
a. Trekkingen zonder terugleggen	105
b. Trekkingen met terugleggen	106
c. Binomiale kansverdelingen	107
5. Verwachtingswaarden	110
- Somregel voor verwachtingswaaarden	113
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	115- 140
1. Centrummaten	115
a. Gemiddelde	115
b. Modus	115
c. Mediaan	115
d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot	116
2. Klassenindelingen	116
a. Klassenmidden	116
b. Modale klasse	117
3. Frequentiepolygonen	117
a. Cumulatieve frequenties	117
b. Relatieve cumulatieve frequenties	118
4. Beelddiagrammen	119
- geclusterd staafdiagram	119
- histogram	121
- reepdiagram	121
- gecombineerd beelddiagram	122
5. Spreidingsmaten	123
a. Standaardafwijking	124
- berekening van de standaardafwijking	124
- betekenis van de standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	125
- standaardafwijking van een kansverdeling	127
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	128
- verwachtingswaarde	128
- variantie	129
- standaardafwijking	129
- de wortel- n wet	133
6. Normale verdelingen	134
Eigenschappen van de normaalkromme	135
a. Berekening van standaardscores	136
b. Standaardiseren	137

VII . PLANIMETRIE	141- 176
1. Driehoeken	141
a. Stelling van Pythagoras	142
b. Goniometrische verhoudingen	142
Lijnstukken in een driehoek	143
1. Zwaartelijnen	143
2. Bissectrices	144
3. Hoogtelijnen	145
4. Middelloodlijnen	145
5. Rechte van Euler	146
2. Vierhoeken	146
- koordenvierhoek	147
3. Regelmatige veelhoeken	147
a. De 'Guldensnede' en het getal phi	148
b. Regelmatige tienhoek	149
c. Regelmatige vijfhoek	150
d. Het pentagram	151
e. Rij van Fibonacci	151
4. De cirkel	152
a. Hoeken in een cirkel	152
- middelpuntshoek	152
- omtrekshoek	153
- binnenhoek van een cirkel	153
- buitenhoek van een cirkel	154
- hoek tussen een koorde en een raaklijn	154
b. Cirkels om, in, en aan een driehoek	155
- omgeschreven cirkel	155
- ingeschreven cirkel	155
- aangeschreven cirkels	156
- betrekking tussen om, in, en aangeschreven cirkels	157
c. Omtrek van een cirkel	158
- Getal van Archimedes en pi	159
d. Oppervlakte van een cirkel	161
e. Meetkundige vraagstukken	161
5. Kegelsneden	164
a. De cirkel	165
b. De ellips	165
c. De parabool	166
d. De hyperbool	168
6. Transformaties	169
a. Assentransformaties	170
- transformatie door translatie	170
- transformatie door rotatie	170
b. Transformaties door vermenigvuldiging	171
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	171

VIII

- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	172
- oppervlakte en omtrek van een ellips	173
c. Poolcoördinaten	174
- Spiraal van Archimedes	175
- De Cardioïde	176
VIII. STEREOMETRIE	177- 196
1. Meetkundige lichamen	177
a. Het prisma	177
b. De piramide	177
c. De cilinder	178
d. De kegel	178
e. De bol	178
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen	178
a. Oppervlakte van prisma en piramide	178
b. Inhoud van een prisma	178
c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder	179
d. Inhoud van een piramide	180
e. Inhoud en oppervlakte van een kegel	180
- oppervlakte van een afgeknotte kegel	181
f. Inhoud van een bol volgens Archimedes	182
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen	183
a. Bolsegment	183
b. Bolschijf	184
c. Bolsector	185
4. Regelmatige vlakvullingen	187
a. regelmatige patronen	187
b. halfregelmatige patronen	188
5. Veelvlakken	188
a. Platonische veelvlakken	189
- dualiteit en symmetrie	191
b. Archimedische veelvlakken	192
- eigenschappen van mogelijke configuraties	192
- knooppunten van de derde orde	193
- knooppunten van de vierde orde	195
- knooppunten van de vijfde orde	195
c. Onregelmatige veelvlakken	196
- antiprisma	196
- rombische triacontaëder	196
- Catalan lichamen	196
IX. VECTORALGEBRA	197- 224
1. Het begrip vector	197
2. Basisbewerkingen van vectoren	198
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren	198

IX

b. Meetkundig scalair product	198
3. Vectorcoördinaten en kentallen	199
4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	200
a. De lengte van een vector	201
b. Algebraïsche som van twee vectoren	201
c. Algebraïsch scalair product	202
5. Inwendig product van twee vectoren	203
6. Meetkundige eigenschappen aangetoond met vectoren	205
7. Vectorvoorstellingen en vergelijkingen	207
a. Vectorvoorstelling van een punt	207
b. Vectorvergelijking van een lijn	207
c. Normaalvergelijking van een lijn	208
d. Vectorvergelijking van een vlak	210
e. Normaalvergelijkingen van een vlak	210
8. Vectorproducten	212
a. Uitwendig product van twee vectoren	212
- eigenschappen van het uitproduct	213
- kentallen van het uitproduct	215
b. Determinanten	216
- Regel van Sarrus	218
- rekenregels voor vierkante determinanten	218
- eigenwaarden en eigenvectoren	220
c. Uitproduct en blokproduct als determinanten	222
- het uitproduct	222
- het blokproduct	222
 X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN	 225- 234
1. Afstanden in vectorruimten	225
a. Afstand van een punt tot een lijn	225
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	226
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	226
d. Afstand van een punt tot een vlak	227
2. Hoeken tussen lijnen en vlakken	228
a. Hoek tussen twee lijnen	228
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	229
c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken	229
- snijlijn van twee vlakken	231
3. Vraagstukken	232
 XI. GRAFEN EN MATRICES	 235- 256
1. Werken met grafen en matrices	235
a. Voorstellingen van een graaf	235

b. Gelijkwaardige grafen	235
c. Graaf en matrix	236
d. Het 'Handelsreizigersprobleem'	237
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	238
3. Bewerkingen met matrices	239
a. Som en verschil van twee matrices	239
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	240
c. Product van twee matrices	240
4. Overgangsmatrices	244
a. Toepassingen op diverse deelgebieden	244
b. Groei van populaties	246
c. Markowketens	247
d. Stabilisatie	248
5. Populatievoorspellingen volgens Leslie	250
a. Voorbeelden van de betekenis	250
- leeftijdsopbouw en totale populatie	251
b. Exponentiële groei	252
c. Bijzondere populatiegroei	252
d. Bevolkingsgroei in China	253
XII. RIJEN EN REEKSEN	257- 282
1. Getallenrijen	257
2. Bijzondere rijen	258
a. Rekenkundige rij	258
b. Meetkundige rij	259
c. Rij van Fibonacci	261
3. Convergentie en divergentie van rijen	262
4. Reeksen	263
- Voorbeelden van reeksen	263
- . Convergentie en divergentie van reeksen	264
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	264
- Regel van Leibniz	265
5. Convergentie van standaardreeksen	266
a. Rekenkundige reeks	266
b. Meetkundige reeks	266
c. Harmonische reeks	267
d. Alternierende harmonische reeks	267
6. Machtreeksen	268
a. Eigenschappen van machtreeksen	269
b. Convergentie van machtreeksen	270
- meetkundige reeks	271
- alternerende machtreeks	271

7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin	273
a. de functie $f(x) = e^x$	274
b. $f(x) = \sin x$	275
c. $f(x) = \cos x$	275
d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$	276
e. $f(x) = \ln x$	277
8. Resttermen	279
- Formule van Lagrange	279
9. Benadering van het getal e van Euler en het getal π	280
a. Het getal e van Euler	280
- definitieformule van e	280
b. Het getal π	281
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	283- 297
1. Differentiaalvergelijkingen	283
a. Voorbeelden	283
b. Lijnelementenvelden	285
c. Methode van Euler	288
d. Voorbeelden van continu dynamische modellen	290
XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL	298- 371
A. Perspectief	298
1. Beelden via een glasplaat	298
2. Perspectiefbeelden van objecten	299
a. Perspectiefbeeld van een lijn	299
b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak	300
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	301
d. Beeld van een punt in het grondvlak	301
e. Beeld van een tegelpatroon	302
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	302
- ware perspectiefbeeld van tegelvloeren	304
4. Eenpuntperspectief	304
a. Kubus en vierkante balk	305
b. Tegelpaden van vierkante tegels	309
5. Tweepuntperspectief	310
B. Exacte logica	316
1. Conjunctie, disjunctie, implicatie	316
2. Waarheidstabellen	317
a. Waarheidstabellen van $p \wedge q$, $p \vee q$ en $p \Rightarrow q$	317
b. De ontkenning niet A ($\neg A$)	318

c. Equivalenties	319
- De Prinses en de tijger	321
3. Bijzondere proposities	323
a. Bewerkingsvolgorden	323
b. Modus ponens, modus tollens, ('modus nonsens')	324
c. Tautologieën, contradicties en paradoxen	325
4. Logische puzzels	326
a. De vier tegels	326
b. Het inslikken van olifanten	327
c. De vijf slavinnen van de kalief	328
d. De zeven bordjes	329
5. Algebra van Boole	330
a. Eigenschappen van de logische operatoren	330
- commutatieve eigenschap	330
- associatieve eigenschap	331
- distributieve eigenschap	331
b. Speciale eigenschappen	332
C. Projectieve meetkunde	333-340
1. Kegelsneden in projectie	333
a. De ellips	334
- ware gedaante van de doorsnede	335
b. De parabool	336
- ware gedaante van de doorsnede	337
c. De hyperbool	337
- gelijkzijdige en ongelijkzijdige hyperbool	337, 338
2.. Doorsnede van een kegel en een cilinder	340
D. De Lorentz-factor	341
E. Beslissingen na steekproeven	343
a. Normale toetsen	343
- onderzoek naar de werking van een vulmachine	343
- toetsing van beweringen	347
b. Binomiale toetsen	348
c. Tekentoetsen	350
F. Poisson-verdeling	353
G. Complexe getallen	357-371
a. Rekenen met complexe getallen	357
- Som, product en quotiënt	357
- Het complexe vlak	358
- Absolute waarde van een complex getal	358
- Complexe getallen en poolcoördinaten	358
b. Meetkunde in de complexe vectorruimte	359
- De cirkel	359
- De eenheidscirkel met sinus z en cosinus z	361

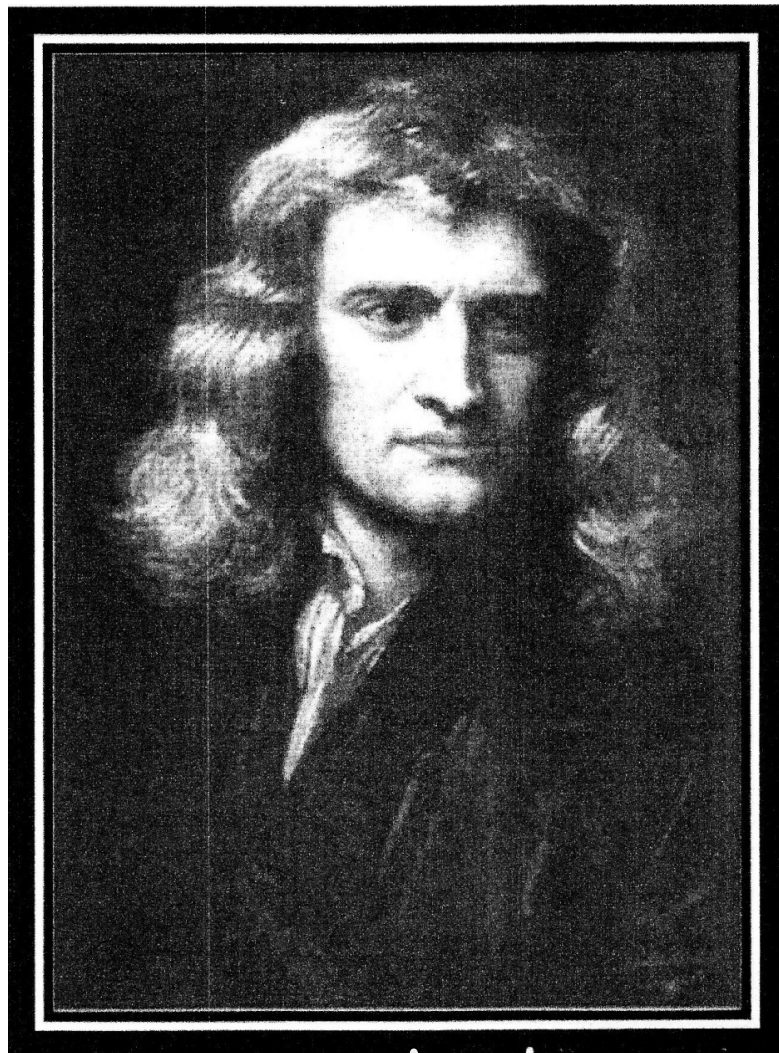
- product en quotiënt van getallen op de eenheidscirkel	361
- Formules van Euler	361
- De polaire of (r, φ) - notatie	362
c. Complexe functie e^z	366
- de complexe functies cosinus z en sinus z	366
d. Wortels en polynomen	367
- n^{de} machtswortels en n^{de} graadspolynomen	368
e. Hoofdstelling van de Algebra	368
f. Reële polynomen	370
Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	372- 373
Trefwoordenregister	374- 377



“ΟΥ ΤΑ ΠΑΝΤΑ
ΤΟΙΣ ΠΑΣΙ ΡΗΤΑ”

NIET ALLES KAN AAN
ALLEN UITGELEGD WORDEN

Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,... (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').



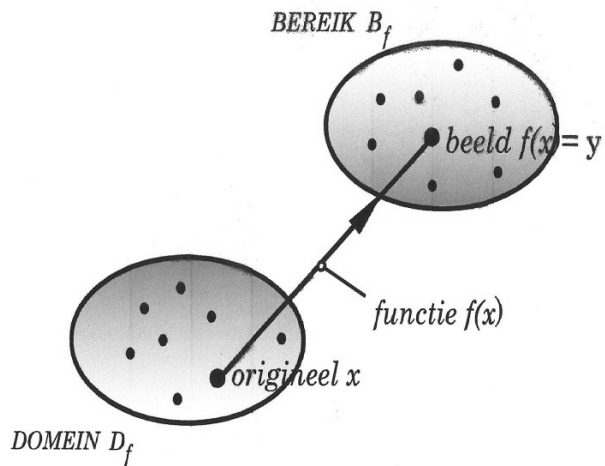
Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde van de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in $2\frac{1}{2}$ uur dus 10 km. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie f gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldig met drie’ dan is $f(3) = 9$,

$f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.

De functie zelf wordt dan geschreven als:

$f(x) = 3 \cdot x$ of korter **$y = 3x$**

De getallen 3, -7 en a in dit voorbeeld heten **originelen** van de functie $f(x) = 3x$, de getallen 9, -21 en $3a$ zijn dan de bijbehorende **beelden** van die functie.

De verzameling originelen van f heet het **domein D_f** van de functie, de verzameling beelden heet het **bereik B_f** .

Als geen speciaal domein of bereik is aangegeven, wordt er van uitgegaan dat *alle* originelen (uit het domein) en *alle* beelden (uit het bereik) elementen zijn van de verzameling reële getallen $\mathbb{R}$.

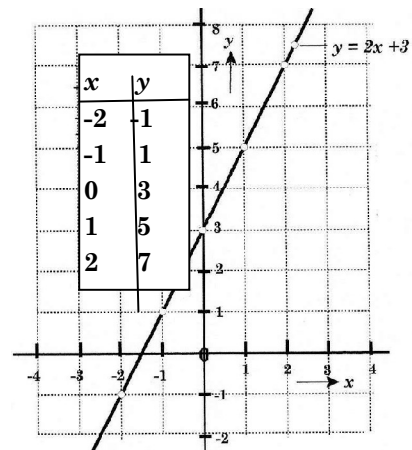
Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f , (g, h, i, ...) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f , precies één element $f(x) = y$ uit het bereik B_f bepaalt

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel:

Het *origineel x* op de *x-as*, het beeld $y = f(x)$ op de *y-as*.

In bijgaande figuur is vanuit de x - y -tabel de grafiek getekend van de functie: **$f(x) = y = 2x + 3$** .

In het algemeen kunnen we met ‘de functie $f(x)$ ’ zowel de **grafiek van $f(x)$** als de **functie $f(x)$ zelf** bedoelen.



2. Lineaire functies

Voor elk tweetal punten P en Q van een lineaire functie geldt dat de verhouding tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de bijbehorende toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een **vaste waarde** heeft.

De betekenis hiervan is als volgt:

Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij

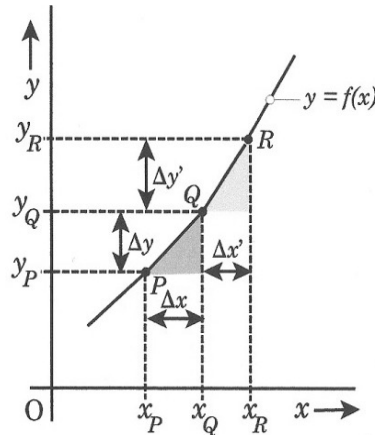
$P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.

De verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de hoek die het lijnstukje PQ maakt met de positieve x -as, dus bepaalt de richting van PQ .

Stel $R(x_R, y_R)$ is een ander naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$

Omdat per definitie de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$, dus zijn de richtingen van de lijnstukjes gelijk ofwel:

PQ en QR liggen in elkaars verlengde dus ook: **P, Q en R liggen op een rechte lijn**



Daar P, Q en R willekeurig gekozen naburig punten zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een **lineaire** functie is dus een **rechte lijn**. (dit verklaart de naam *lineaire functie*). De constante verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x \neq 0$) bepaalt de richting van lijn l en noemt men daarom de **richtingscoëfficiënt a** van l .

De vergelijking van lijn l , dus de betrekking tussen de waarden x en y waaraan alle punten $P(x, y)$ van lijn l voldoen vind je nu als volgt:

Voor de lijn l tussen twee willekeurige punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ geldt volgens voorgaande dat de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$... (1)

Ga ervan uit dat l niet evenwijdig is met de y -as, dus $x_Q - x_P \neq 0$ en dat $P(x_P, y_P) = (0, b)$ het snijpunt is van l met de y -as, dus $x_P = 0$ en $y_P = b$... (2)

Voor $Q(x_Q, y_Q)$ kiezen we een willekeurig punt $Q(x, y)$, dus $x_Q = x$ en $y_Q = y$... (3)

(2) en (3) in (1) ingevuld geeft: $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x}$, dus $ax = y - b$ ofwel $y = ax + b$

De betrekking $y = ax + b$ heet nu de vergelijking van l .

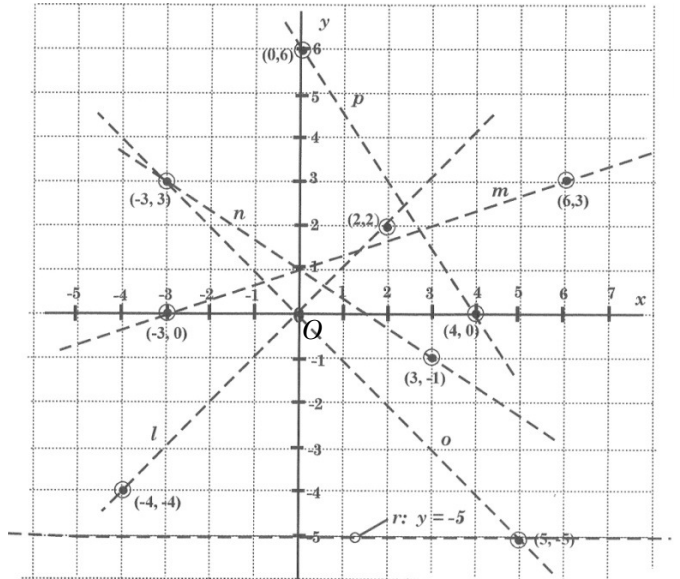
(Als $l \parallel y$ -as dan is bij elke y : $x_P = x_Q$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ bestaat dan niet omdat $x_Q - x_P = 0$)

Bij elke y is dan $x = x_P = x_Q$ dus is $x = x_P (= x_Q)$ de vergelijking van l als $l \parallel y$ -as)

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking $y = ax + b$ waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y -coördinaat is van het snijpunt van l met de y -as.

Toepassingen:

1. In deze figuur zijn de lijnen l , m , n , o en p getekend door twee gegeven punten in een *orthonormaal coördinatenstelsel* XOY . (Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaten-assen: de X -as = 'abscis' en de Y -as = 'ordinaat', met oorsprong O als hun snijpunt. De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1 .



- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal ook de vergelijking van de X -as en de Y -as.
- Hoe lopen de lijnen $q: x = 3$ en $r: y = -5$?

a. De grafiek van een lineaire functie is een lijn l met vergelijking $l: y = ax + b$, waarin a de *richtingscoëfficiënt* is van l en b de y -coördinaat van het snijpunt van l met de y -as. Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten in het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is dan van lijn l : $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{2 - (-4)} = 1$ en $b = 0$ (mag je hier uit de figuur aflezen)

dus de vergelijking is $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$.

- Voor m geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$ en $b = 1$

dus wordt de vergelijking: $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

- Voor n geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ en $b = 1$

dus is de vergelijking is $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

- Voor o geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-8}{8} = -1$ en $b = 0$

dus de vergelijking is: $o: y = -x$

- Voor p geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$ en $b = 6$

dus de vergelijking is: $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b - Voor *alle punten op de x -as* geldt: $y = 0$, dus onafhankelijk van de waarde van x .

De vergelijking van de x -as is dan: $y = 0$ of vollediger: $x \in \mathbb{R}$ en $y = 0$

Zo geldt voor alle punten van de y -as $x = 0$ ofwel: $x = 0$ en $y \in \mathbb{R}$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn q met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.

Het is dan de (verticale) **lijn, evenwijdig met de y -as door het punt $(3, 0)$**

Zo is de lijn $r: y = -5$ de (horizontale) **lijn evenwijdig met de x -as door het punt $(0, -5)$**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten $A = (3, 4)$ en $B = (-4, -2)$
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn $m: y = 2x - 3$

a. In $l: y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt van l uit: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: $l: y = \frac{6}{7}x + b$.

Hierin de coördinaten van $A = (3, 4)$ (of $B = (-4, -2)$) ingevuld geeft $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$ zodat

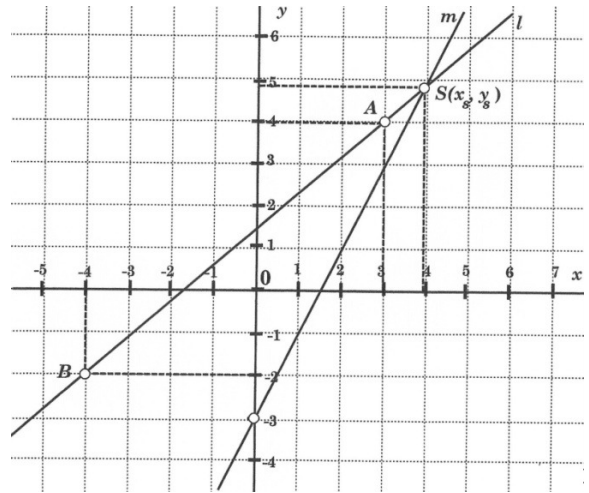
de vergelijking is $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$ *)

b. Het snijpunt $S(x_s, y_s)$ van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan de vergelijking:

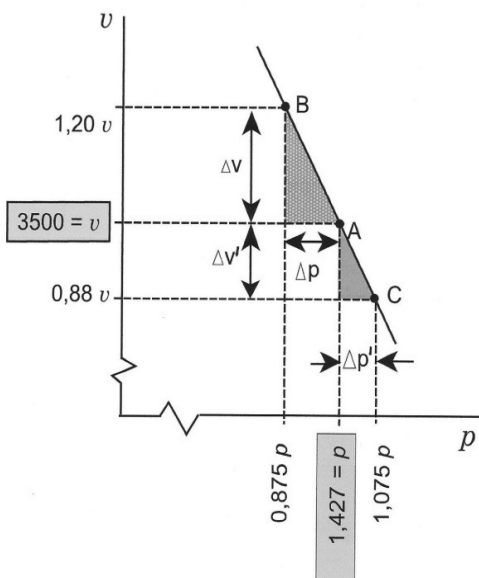
$$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7} \text{ en aan } m: y = 2x - 3, \text{ zodat dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Het snijpunt van l en m is dus het punt $S(\frac{31}{8}, \frac{19}{4}) \approx (3,9; 4,8)$



3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
 Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
 Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%. (punt C).



- a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
 b. Wat is de betekenis van de uitkomst van a voor de prijs/verkoop-verhouding bij stijgende en bij dalende prijs?

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20v}{p - 0,875p} = \frac{-0,20v}{0,125p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

$$\text{De richtingscoëfficiënt van CA is } \frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p} = \frac{-0,12v}{0,075p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

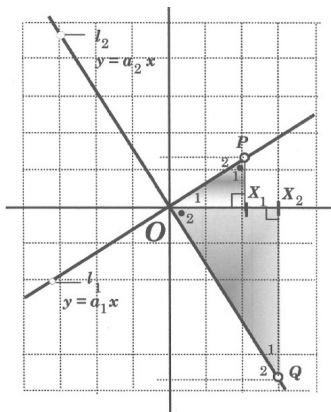
De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk $\Rightarrow$
A, B en C liggen op een rechte lijn.

*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in {3, -4} [STO] L1 en {4, -2} [STO] L2. Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg ($ax + b$) [ENTER]
 De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg $y = ax + b$: $a \approx .85714... = \frac{6}{7}$; $b \approx 1.42857... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject *BC* de verhouding *prijsstijging* : *verkoopdaling* $(-1,6)$ gelijk is aan de verhouding *prijsdaling* : *verkoopstijging* $(-1,6)$. Men zegt in zo'n geval dat de *verkoopdaling* (bij toenemende prijs) **evenredig** is met de *verkoopstijging* (bij dalende prijs), want een *evenredigheid* is een gelijkheid van twee verhoudingen.

Eigenschap:

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 gelijk aan -1 , dus $a_1 \cdot a_2 = -1$ en ook omgekeerd



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x -as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x -as.

De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}, \text{ dus } a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de $\Delta \Delta OPX_1$ en OQX_2 is $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$ (gegeven).

Ook is in ΔOPX_1 : $\angle P_1 + \angle O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

dus is $\angle P_1 = \angle O_2$. (met zwarte stip) ... (2)

De $\Delta \Delta OPX_1$ en OQX_2 zijn dan gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn

en $\angle P_1 = \angle O_2$ volgens (2) met gevolg: $PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$

$$\text{dus } \frac{PX_1}{OX_1} = \frac{OX_2}{QX_2} \Rightarrow \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = 1 \text{ zodat } \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{-QX_2}{OX_2} = -1 \quad \dots(3)$$

Uit (3) en (1) volgt dan: $a_1 \cdot a_2 = -1$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $a_1 \cdot a_2 = -1$ dan staan l_1 en l_2 loodrecht op elkaar.

(Lees voor het bewijs hiervan bovenstaand bewijs van achteren naar voren.)

3. Kwadratische functies

Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie $f(x)$ van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a , b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads-

functies, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van '**kwadraatsplitsing**': *)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \end{aligned}$$

ofwel: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ met $D = b^2 - 4ac$... (a)

*) In deze kwadraatsplitsing is gewerkt naar de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, een toepassing van het '**merkwaardig product**' $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dat hiernaast en de papegaaimethode is gedemonstreerd, evenals het merkwaardig product: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Uit de onderbouw:
'Papegaaimethode' voor producten

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b) \times (c+d) \\ &= ad + db + bc + ca \\ (a+b)(a+b) &= (a+b) \times (a+b) \\ &= ab + bb + ba + aa \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= (a+b) \times (a-b) \\ &= -ab - bb + ba + aa \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Kies je nu $x = -\frac{b}{2a}$ in: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan ontstaat:

$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot 0 - \frac{D}{4a} \text{ dus } f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{D}{4a}.$$

Dit betekent dat $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een punt is van **elke kwadratische functie** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem dit punt T , dan is $T(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$... (b)

1^o. We tonen nu aan dat het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ de *uiterste waarde* is ('**maximum**' of '**minimum**') van de parabool $f(x)$.

Omdat volgens (a) voor *elk willekeurig punt* (x, y) van $f(x)$ geldt: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$

en volgens (b) voor *het punt T* geldt dat $y_T = -\frac{D}{4a}$, volgt de waarde van $y - y_T$ uit:

$$y - y_T = \{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - \frac{-D}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 \quad \dots (c)$$

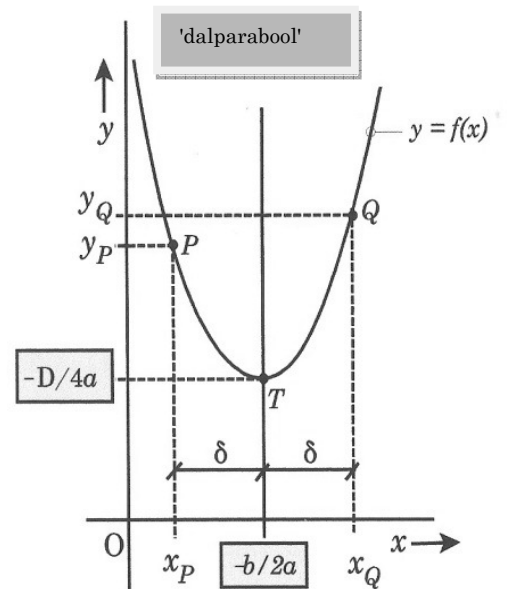
Als hierin $a > 0$ dan is $a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, want $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$

Dit betekent als $a > 0$, dat $y - y_T > 0$ zodat *elke waarde van y* in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan y_T , dus is het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een **minimum** van de functie $f(x)$.

Op dezelfde manier blijkt dat **als $a < 0$** steeds geldt

$y - y_T \leq 0$ ofwel: $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een **maximum** van $y = ax^2 + bx + c$ als **$a < 0$** ... (d)

Het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, *minimum of maximum*, heet de **top** van de kwadratische functie $f(x)$.



2^o De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een **symmetrieas** van $f(x)$.

Bewijs: Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ

links van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt $x_P = -\frac{b}{2a} - \delta$ en voor een punt Q van $f(x)$ op eenzelfde afstand δ *rechts* van deze lijn is

$$x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta.$$

In de vorm van de kwadraatplitsing is: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dus als $x = x_P = -\frac{b}{2a} - \delta$

$$\text{dan is } y_P = a(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a} \quad \dots (e)$$

$$\text{Als } x = x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta \text{ dan is } y_Q = a(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a} \quad \dots (f)$$

Uit (e) en (f) volgt: $y_P = y_Q$, dus P en Q liggen **symmetrisch t.o.v. de lijn $x = -\frac{b}{2a}$** die gaat door de **top** $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ van de parabool. Samengevat:

De vorm van de (grafiek van de) kwadratische functie heet **parabool**, de symmetrieas heet de **as**, het maximum of minimum T heet de **top** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een *minimum* ('**dalparabool**'), als $a < 0$ dan is top T een *maximum* ('**bergparabool**').

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ en een punt $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$. Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')

a. Nulpunten of wortels

Eventuele snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x -as ($y = 0$) moeten voldoen aan de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ **en** aan $y = 0$ dus zijn de **oplossingen** = **wortels** van de oplossingsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Ze worden ook **nulpunten** van $f(x)$ genoemd..

Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de '**abc-formule**' gebruikt:

Afleiding van de abc-formule

Schrijf je de oplossingsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ in de vorm van de kwadraat-afplitsing, (blz. 5) dan ontstaat: $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$.

De nulpunten x volgen dan uit: $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{4a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$

met gevolg: $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c = 0$ die je berekent met de 'abc-formule': $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ waarin $D = b^2 - 4ac$

De waarde van D hierin bepaalt het aantal oplossingen, dus het aantal wortels van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de **discriminant** van deze vergelijking:

1^o. Als $D = b^2 - 4ac > 0$ dan bestaat $\sqrt{D}$ en heeft de vergelijking twee verschillende wortels:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt de x -as dan in twee punten.

2^o. Als $D = 0$ dan is $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één tweevoudige, ('dubbel tellende') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.

Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een **raakpunt** ('twee samenvallende punten') op de x -as.

3^o. Als $D < 0$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet in $\mathbb{R}$ dus zijn er geen reële oplossingen.

De parabool snijdt de x -as niet. Er zijn geen reële nulpunten. *)

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$ is te schrijven als $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

*) Op blz.51-52 worden imaginaire oplossingen (complexe getallen) van vierkantsvergelijkingen behandeld in geval $D < 0$. In Hoofdstuk XIV –G worden expliciet voor wiskunde D de complexe getallen uitgebreid behandeld.

Bewijs::

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ met $a = 1$ zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ en $a = 1$ dus volgt dan het **product**

$$\begin{aligned} (x - x_1) \cdot (x - x_2) & \text{ uit: } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left(x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ (x - x_1) \cdot (x - x_2) & = \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2}\right) \cdot \left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2}\right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \\ (\text{want } D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1 \text{ dus } b^2 - D = 4c) & \text{ zodat } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \dots(1) \end{aligned}$$

Met de gelijkheid $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ is de term $x^2 + bx + c$ volgens (1) **ontbonden in twee factoren** $(x - x_1)$ en $(x - x_2)$ als x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn.

Uitgewerkt geeft dit: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$
waarin dus $(x_1 + x_2) = -b$ en $x_1 \cdot x_2 = c$(2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$ snel te vinden:

Voorbeeld: Bepaal de wortels van de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$. (Steeds mogelijk als $D \geq 0$ is, omdat er dan één of twee nulpunten p, q zijn, dus regel (1) van toepassing is.)

Hiervoor geldt dan $p + q = 11$ en $p \cdot q = 28$, dus $p = 4$ en $q = 7$ zodat

$x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = (x - 4) \cdot (x - 7)$ dus vindt je de nulpunten uit:

$x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = 7$ volgens de 'Wet van het nulelement':

Als $a \cdot b = 0$ dan $a = 0 \vee b = 0$. De wortels van $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn $x = 4 \vee x = 7$

Toepassingen: 1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Schrijf $x^2 - x - 12 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$, dan is $p + q = 1$ en $p \cdot q = -12$.

Hieraan voldoen $p = 4$ en $q = -3$ dus als $x^2 - x - 12 = 0$, dan is $(x - p) \cdot (x - q) =$

$(x - 4) \cdot (x + 3) = 0$ zodat $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -3$

De nulpunten zijn $x = 4$ en $x = -3$

2. Los op: $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$, dan is

$p + q = -2$ en $p \cdot q = -143$, dus $p = -13$ en $q = 11$. Gevolg: Als $x^2 + 2x - 143 = 0$, dan is

$(x - (-13)) \cdot (x - 11) = 0$ zodat $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow x = -13 \vee x = 11$

Opgave: Gegeven is de parabool $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatafsplitsing volgt dat voor de parabool geldt: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$.

Omdat voor elke x geldt dat $(x - 2)^2 \geq 0$ is steeds $y \geq -3$ dus geldt voor de coördinaten van top T (= minimum van de dalparabool omdat $a > 0$): $y_T = -3$ en $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow x_T = 2$.

De top is dus het punt **$T(2, -3)$** ,

b. Bepaal de raaklijn in het punt $(1, -2)$ van de parabool,

Het punt $P(1, -2)$ ligt op de parabool $y = x^2 - 4x + 1$ want $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$ dus voldoet aan de vergelijking.

Noem de raaklijn $l: y = ax + b$, dan geldt voor het raakpunt op l
 $P(1, -2) = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow a = -2 - b$ (1)

Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn ligt geldt: $y = x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow$

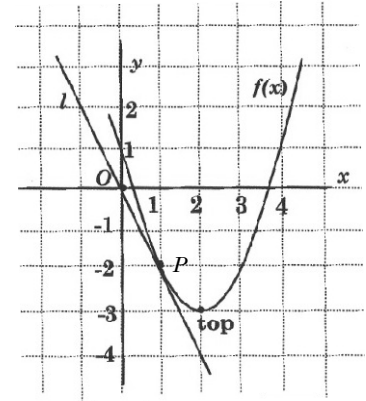
$$x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 4x + 2x + bx + 1 - b = 0$$

$$x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow x^2 + (b - 2)x + (1 - b) = 0$$

De discriminant van deze tweedegraadsvergelijking moet $= 0$ zijn omdat de vergelijking één wortel heeft, (raakpunt, dus dubbel tellende wortel)) dus is deze

$$b^2 - 4 \cdot ac = (b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \dots (2)$$

Uit (2) en (1) volgt dan: $b = 0$ en $a = -2$, dus is de raaklijn $l: y = ax + b \Rightarrow y = -2x$.



4. Machtsfuncties

De functie $y = f(x) = x^n$ is een machtsfunctie van x , waarin de exponent n een constante is en het grondtal x de variabele

De eenvoudigste *machtsfuncties* zijn van het type $y = f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$; zij worden vaak polynomen genoemd. Uitgaand van de *definitieformule van een natuurlijke macht* van x :

$x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ of algemeen: $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ keer}}$ volgen direct

de *regels*: $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$, $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ en $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$. Hieruit volgen de eigenschappen:

Voor *elke* $x \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = x^0$ en ook $e^{\frac{x^p}{x^p}} = 1$, dus $x^0 = 1$ en

$\frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = x^{-p}$ en $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$ omdat $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x$

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{p \cdot q} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^0 = 1 \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

Per definitie gelden deze rekenregels ook voor *alle machten met reële exponenten*:

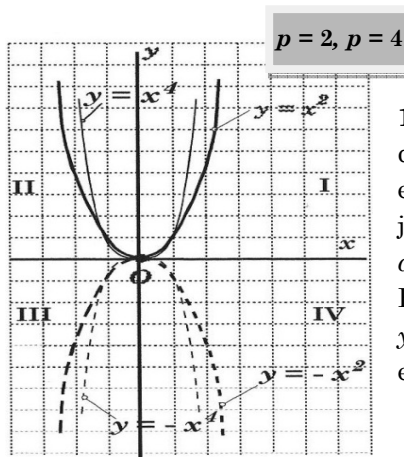
Voorbeelden: $3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}$, $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$, $12^{-0,38} \approx 0,389$ (GR)

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten n^{de} graads machtsfuncties.

Zo is $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad*, machtsfuncties als $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad*, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad* et cetera. (De besproken 'lineaire functie' $f(x) = ax + b$ is dus een *eerstegraads machtsfunctie*, de 'kwadratische functie' $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een *tweedegraads machtsfunctie*).

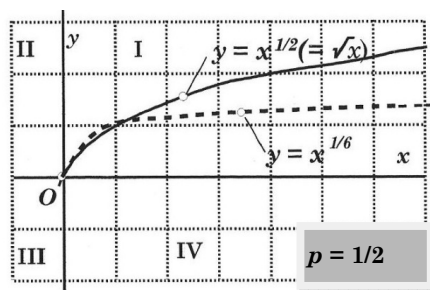
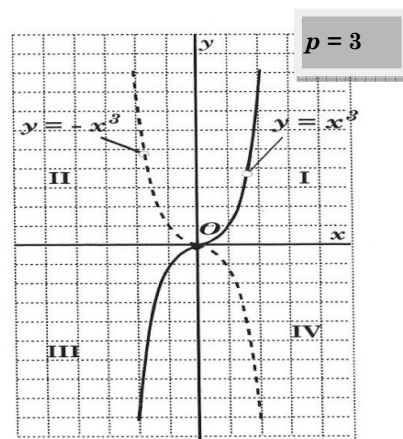
a. Grafieken van machtsfuncties

Aan de *graad van standaard-machtsfunctie* kun je de (globale) grondvorm van hun grafieken herkennen. We onderzoeken hier de grafieken in de *vier kwadranten* I, II, III en IV van machtsfuncties $f(x) = y = x^p$ bij verschillende waarden van p .



1. Als p in $y = x^p$ een **positief, even getal** is, dus $p = 2, 4, 6, \dots$ dan zijn alle y -waarden van $y = x^p$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een **dalparaboloïde**, die als $p = 4, 6, 8, \dots$ 'scherper' is dan de standaard dalparabool $y = x^2$ met $p = 2$. Bij eenzelfde waarde van p is $y = -x^p$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm een **bergparaboloïde**.

2. Is p in $y = x^p$ een **positief, oneven, geheel getal** $\neq 1$, dus $p = 3, 5, 7, \dots$ dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x ($x^2, x^4, x^6, \dots$ die steeds ≥ 0 zijn), ook *negatieve* y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$. Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven* p dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant*. Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $y = -(x^p)$ een *spiegeling in de oorsprong* van $y = x^p$.



3. Als p in $y = x^p$ een **positieve breuk** is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in $y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan er *geen reële* y waarden bij *negatieve* x . Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ en is $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ dus bestaan beide niet in $\mathbb{R}$. Omdat bij een positieve exponent, alle machten van

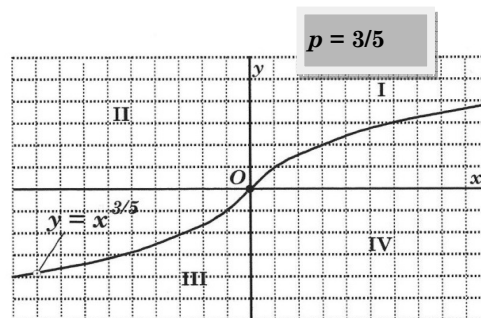
een positief getal ook positief zijn, liggen alle waarden van $y = x^p$ in I.

4. Als p in $y = x^p$ een **positieve breuk** is, met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve* x , die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.

Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$:

$$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297.$$

De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)



*) Met de GR TI-83 zijn alle grafieken direct te 'plotten'. VB: Druk op Y1= en voer in $X^{(3\div 5)}$ ENTER.

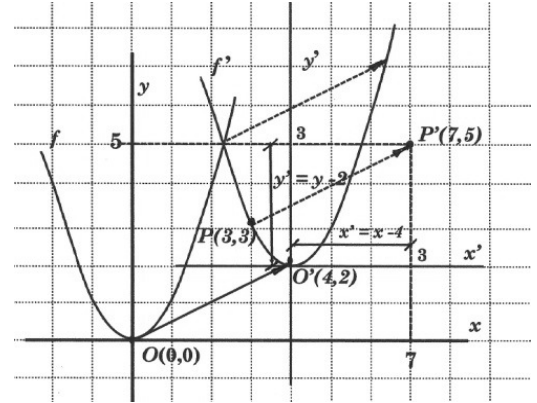
Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5. Kies Xscl =1 en Yscl =1 (Xres=1) ENTER. Druk op Graph en de grafiek uit 4 verschijnt op het display.

b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ kan je via *transformaties* vaak gemakkelijk formules met hun grafieken afleiden van meer gecompliceerde functies. Bij **congruentietransformaties** als: *translatie* ('evenwijdige verschuiving' van $y = f(x)$), *rotatie* (draaiing om de oorsprong O) en *spiegeling* (vermenigvuldiging t.o.v. een lijn met de factor -1) ontstaat uit $f(x)$ een beeld $f'(x)$ dat congruent is met $f(x)$. Voorbeelden:

- Transformaties door translatie

Hiernaast is in een XOY stelsel de grafiek f getekend van de 'standaardparabool' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong O . Via een **translatie** $T(4,2)$ verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (positieve x -richting) en +2 eenheden omhoog (positieve y -richting), waardoor een met f congruente grafiek f' ontstaat. De oorsprong $O(0,0)$ = top van f , wordt nu afgebeeld op het punt $O'(4,2)$, de oorsprong van het verschoven assenstelsel $x' O' y'$.



Een willekeurig punt $P(x,y)$, (in de figuur $P(3,3)$), wordt

door de translatie $T(4,2)$ afgebeeld op het punt $P'(x+4, y+2)$, (in de figuur $P'(7,5)$).

Ten opzichte van het $x' O' y'$ -stelsel geldt dan dat $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$... (1)

De vergelijking van de verschoven parabool f' is $f': y' = (x')^2$ want de top van f' ligt in de oorsprong O' dus geldt hier de topvergelijking ten opzichte van het stelsel $x' O' y'$.

Substitutie hierin van de waarden $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$ uit (1) geeft als vergelijking van de parabool f' $y' = x'^2$: $y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2$ (2)

Noem je de translatie $T(4,2)$ nu algemeen $T(a, b)$, dan volgt direct uit (2):

$$f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b \quad \dots (3)$$

Deze transformatieregel werd voor beter begrip afgeleid via de functie $f(x) = y = x^2$ door op het translatiebeeld $y' = x'^2$ de algemeen geldende betrekkingen bij translaties volgens regel (1) toe te passen. De regel geldt dan ook onvoorwaardelijk voor elke andere kromme $y = f(x)$, dus bijvoorbeeld voor $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $y = \sin(x)$, ...

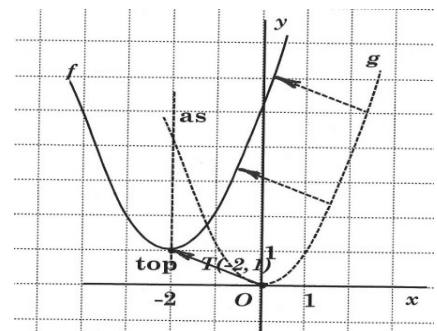
We definiëren daarom algemeen de **translatietransformatie-regel**:

Bij de translatie $T(a,b)$ geldt voor de coördinaten (x', y') van het beeldpunt P' van een punt $P(x, y)$ t.o.v. het verschoven assenstelsel $x' O' y'$: $x' = x - a$, $y' = y - b$
 Voor het beeld $f'(x)$ van een functie $f(x)$ geldt dan t.o.v. het XOY stelsel: $y = f(x - a) + b$

Toepassingen:

- Schets de grafiek van de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$

Volgens regel 2 hierboven gaat bij een translatie $T(a, b)$ de grafiek g van $y = f(x) = x^2$ over in $f: y = (x - a)^2 + b$. In $f: y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$ uit een **translatie** van de standaardfunctie $g: y = x^2$ van $T(-2, 1)$. In de figuur is de grafiek van f getekend. De **top** is dan het punt $(-2, 1)$, de **as** is de lijn $x = -2$.

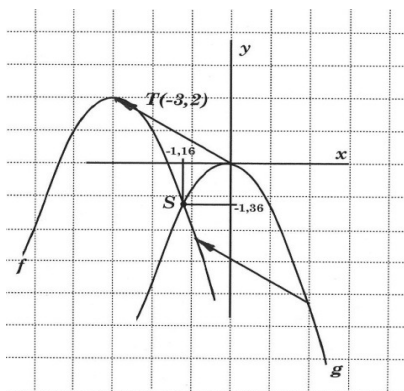


2. Schets de grafiek van de functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool $g: y = -x^2$

Door kwadraatafsplitsing herleid je eerst de gegeven functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ tot:

$$f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x+3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie $g: y = -x^2$ door de **translatie** $T(-3, 2)$.



De **top** van (bergparabool) f is dan het punt $(-3, 2)$ de **as** is de lijn met $x = -3$.

Het **snijpunt** $S(x, y)$ van de grafieken f en g volgt uit:

$$y = -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2 \text{ dus uit } -6x - 7 = 0 \text{ zodat}$$

$$x = -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1,36.$$

Het gevraagde snijpunt is dan $S(-1,16; -1,36)$.

3 Schets de grafiek van de functie $f: y = (x-3)^5 - 50$ en bepaal de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn $l: y = 25x$.

De grafiek van de functie $f: y = (x+3)^5 - 50$ ontstaat uit $f: y = x^5$ door de **translatie** $T(3, -50)$.

De snijpunten van de lijn $l: y = 25x$ met de grafiek van f bereken je in het $x'O'y'$ -stelsel omdat daarin geldt $f': y' = (x')^5$ en $l': y' = \frac{50}{2}x' = 25x'$, want $l' \parallel l$ gaat door O .

Voor de snijpunten van l' en f' geldt dan $(x')^5 = 25x'$

$$\text{dus } x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Uit } y' = 25x' \text{ volgt dan } y' = 0 \vee y' \approx \pm 25 \cdot \sqrt{5}$$

De snijpunten van $f': y = (x-3)^5 - 50$ en $l: y = 25x$ zijn S_1', S_2' en S_3' (witte stippen in de figuur), met:

$$S_1' = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}); S_2' = (0,0); S_3' = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$$

De gevraagde snijpunten S_1, S_2 en S_3 (zwarte stippen in de figuur), van l' en f zijn dan:

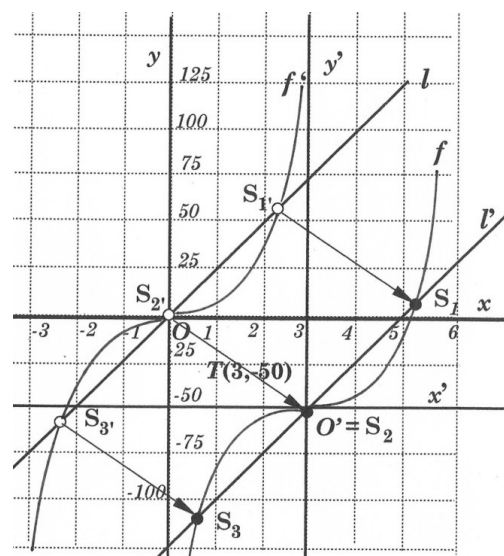
$$S_1 = (\sqrt{5}; 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)$$

$$S_2 = (0,0) + T(3, -50) = (3, -50)$$

$$S_3 = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (3 - \sqrt{5}, -25\sqrt{5} - 50)$$

NB: Hiermee zijn de snijpunten van $f: y = (x-3)^5 - 50$ en $l: y = 25x$ exact berekend, door de vijfdegraadsvergelijking $(x-3)^5 - 50 = 25x$ middels de translatietransformatie $T(3, -50)$ te reduceren tot de vorm $(x')^5 = 25x' \Rightarrow (x')^4 \cdot x' = 25x'$ met als exacte oplossingen

$$x' = 0 \vee x' = \sqrt{5} (\approx 2,24 \text{ dubbeltellend}) \vee x' = -\sqrt{5} (\approx -2,24 \text{ dubbeltellend}).$$



Transformaties door vermenigvuldiging

Ook bestaan transformaties van functies door *vermenigvuldiging van figuren*.

Men onderscheidt daarbij

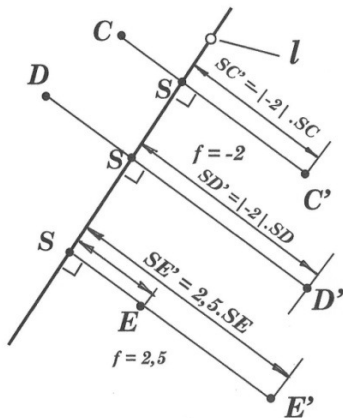
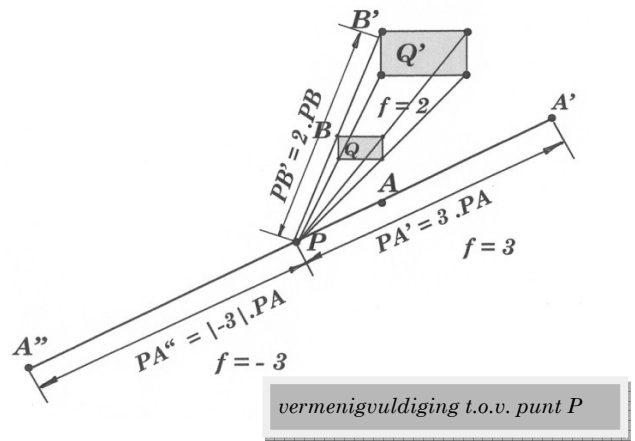
a - vermenigvuldiging *ten opzichte van een punt*

b - vermenigvuldiging *ten opzichte van een lijn*

a. Per definitie is het **product** van een punt **A** **ten opzichte van een punt P** (= het 'centrum') bij een **positieve factor f**, het punt **A'** op de lijn **PA**, waarvoor geldt dat **$PA' = f \times PA$** .

Zo is ook de rechthoek **Q'** het beeld van **Q** bij vermenigvuldiging t.o.v. **P** met de factor **$f = +2$**

Bij een **negatieve factor f** ligt het beeldpunt **A''** van punt **A** op de lijn **AP** aan de andere kant van **P** als **A** en wel zo dat **$PA'' = |f| \times PA$** , hier **$PA'' = |-3| \times PA$**



b. Bij vermenigvuldiging van een punt **E** **ten opzichte van een lijn l** met een **positieve factor f** ontstaat het beeldpunt **E'** door vanuit **E** een **loodlijn** op **l** neer te laten en vanuit het **voetpunt S** van die loodlijn een afstand **SE'** zo af te passen, dat **$SE' = f \times SE$** , in de figuur is **$f = 2,5$** dus **$SE' = 2,5 \times SE$**

Bij een **negatieve factor f** ligt het beeldpunt **D'** van punt **D** op de lijn **DS** **aan de andere kant van S als D**, en wel zo dat

$SD' = |f| \times SD$, dus in de figuur met **$f = -2$** : **$SD' = |-2| \times SD$**

Zo is ook **C'** het beeldpunt van **C** bij vermenigvuldiging van **C**

t.o.v. **l** met de factor **$f = -2$** , zodat **$SC' = |-2| \times SC$**

vermenigvuldiging t.o.v. lijn l

Toepassing:

Teken de grafiek van de functie **$g: y = 2x^2 - 4x + 6$** .

Omdat de **coëfficiënt van $x^2 \neq 1$** heeft **g** niet de vorm van de **standaardparabool $y = x^2$** zoals wel alle grafieken van de functies **$y = 1x^2 + bx + c$** . Met alleen de **translatietransformatie** kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

1^o Pas **kwadraatafsplitsing** toe, dus schrijf: **$g: y = 2x^2 - 4x + 6$**

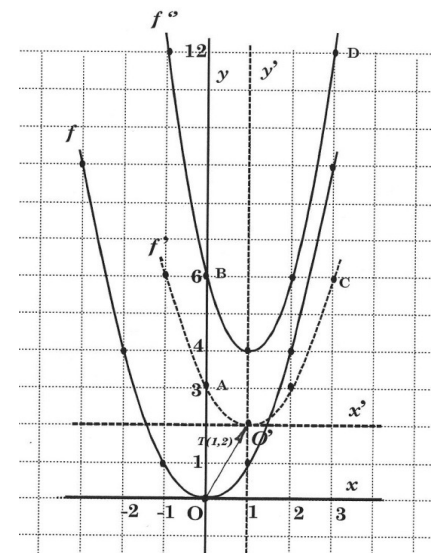
$\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2((x^2 - 2x + 1) + 2) = 2(x - 1)^2 + 4$

2^o Pas de **translatie T(1,2)** toe op de punten van de **standaardgrafiek $f: y = x^2$** zodat het beeld ontstaat van de grafiek **$f' = (x - 1)^2 + 2$** (volgens de **translatietransformatie-regel**).

3^o **Vermenigvuldig** dit beeld **f'** **ten opzichte van de x-as** met **+2** (notatie **$P(x - as, 2)$**).

Dit geeft: **$f'': y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6$** , de gevraagde parabool **g**, want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. een lijn (hier de **x-as**) volgt direct de eigenschap:

Bij de vermenigvuldiging **$P(x - as, a)$** gaat een functie **$y = f(x)$** over in **$y = a \cdot f(x)$**



- Transformaties van wortelvormen

Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as, afgeleid worden van hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = x^{0,5}$

Voorbeelden:

a. Schets de grafieken van de functies

$$f: y = \sqrt{x-3} - 2 \text{ en } g: y = -3\sqrt{x+3}$$

b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk..

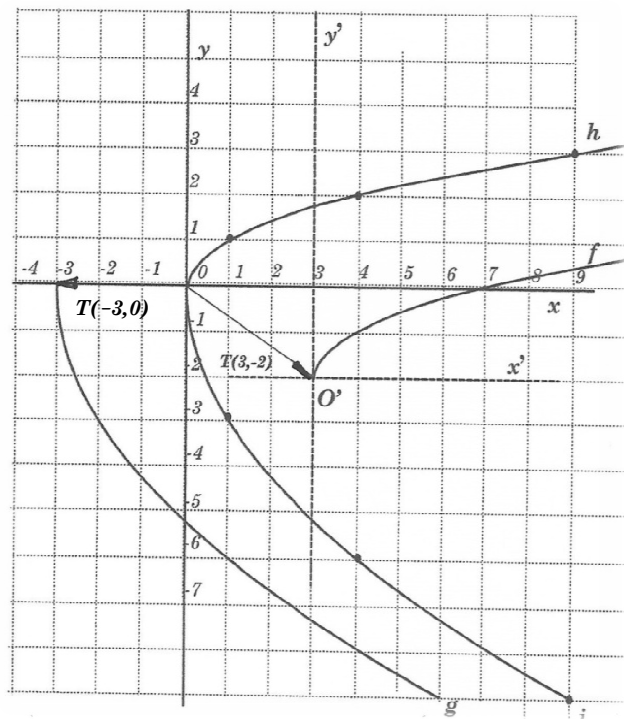
c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

a. Teken de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$.

Deze heeft als startpunt het punt $(0,0)$ en gaat verder door de roosterpunten $(1,1)$, $(4,2)$, $(9,3)$,...

- Pas nu op h de translatie $T(3, -2)$ toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek $f: y = \sqrt{x-3} - 2$

- Uitgaande van de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$ vermenigvuldig je deze t.o.v. de x -as met de factor -3 , waaruit de grafiek $i: y = -3\sqrt{x}$ ontstaat. Pas hierop de translatie $T(0, -3)$ toe, dan vind je de grafiek van $g: y = -3\sqrt{x+3}$ welke werd gevraagd.



b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt* van $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ het *beeldpunt* $O'(3, -2)$ is van het origineel $(0,0)$ van $h: y = \sqrt{x}$ bij de translatie $T(3, -2)$.

Zo is het beeldpunt $(-3,0)$ het *beginpunt* van $g: y = -3\sqrt{x+3}$.

c. De linkergrens van het *domein* van de **standaardgrafiek** $h: y = \sqrt{x}$ is $x = 0$ in het punt $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $D_h = [0, \rightarrow)$. De linkergrens van het *bereik* van h is de waarde $y = 0$, de rechtergrens is $y = +\infty$ dus $B_h = [0, \rightarrow)$. Daaruit volgt dan:

De linkergrens van het **domein** van f is $x = 3$ de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $D_f = [3, \rightarrow)$

linkergrens van het **bereik** van f is $y = -2$ de rechtergrens is $y = +\infty$, dus $B_f = [-2, \rightarrow)$

De linkergrens van het *domein* van g is $x = -3$, de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $D_g = [-3, \rightarrow)$

linkergrens van het *bereik* van g is $y = 0$, de rechtergrens is $y = -\infty$, dus $B_g = \langle \leftarrow, 0]$.

Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:

- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$. Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en Δ Tbl op 1 instellen..

De **tabel** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf* $X = 4$ 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x} = \sqrt{-1}$ niet bestaat. Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* $X = 3,6$

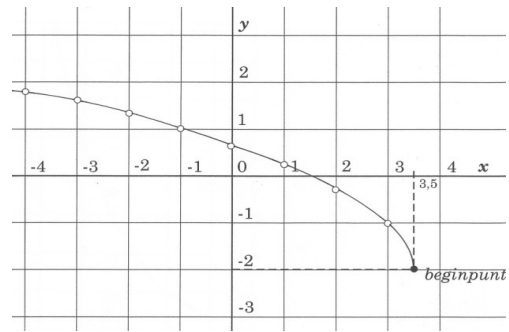
Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR dus niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Een beginpunt moet dus handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$,
dus is van het **startpunt** $x = 3,5$ waarbij dan
 $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$.

Beginpunt van f: $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$ is dus het
punt **S (3,5 ; -2)**.

Het domein van de functie is $\langle \leftarrow ; 3,5 \rangle$,
het bereik is dan $[-2, \rightarrow \mathbb{R}]$

Verdere punten van de grafiek volgen uit
onderstaande tabel:



x	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Toepassingen

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt:
 $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x + 3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

1. $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

Er moet gelden: $8 - 4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow x \leq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het **punt (2, 3)**.

Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$, bereik $B_f = [3, \rightarrow \mathbb{R}]$

2. $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

Hier moet gelden: $4x - 8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het **punt (2, 3)**

Domein $D_g = [2, \rightarrow \mathbb{R}]$ bereik $B_g = [3, \rightarrow \mathbb{R}]$

3. $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

$2x + 6 \geq 0$ dus $x \geq -3$. Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2(-3) + 6} = 5 \Rightarrow$
beginpunt is dus het **punt (-3, 5)**

Domein $D_h = [-3, \rightarrow \mathbb{R}]$ bereik $B_h = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.

5. Exponentiële functies

Naast de *machtsfunctie* $f(x) = x^a$ met *vaste exponent* a en *variabel grondtal* x , bestaat
'omgekeerd' een **exponentiële functie** $f(x) = a^x$ met *vast grondtal* a en *variabele exponent* x .

*Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante
heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$)*

Voor $a \leq 0$ is de functie *niet gedefinieerd*.

Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke $x, x \neq 0$ dus is a^x *geen functie*. Als $a < 0$ dan bestaat a^x
niet voor elke waarde van x . Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; *ongedefinieerd* als a
negatief is.

Bij elke exponent x , is de waarde van a^x ($a > 0$) steeds positief want:

- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ omdat per definitie $a^x = a.a.a..a.$ (x -keer) dus weer positief.
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

Alle grafieken $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en tweede kwadrant*.

Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle* grafieken *door het punt* $(0,1)$.

Beschouw nu de functie $f(x) = a^x$ voor waarden van a , met $0 < a < 1$ en als $a > 1$.

1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)

Voor $0 < a < 1$ is de functie **monotoon dalend**, dus bij

toenemende x neemt y af. Immers als $f(x) = a^x$ dan is

$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a < 1$ is $a \cdot a^x < a^x$ dus

$a^{x+1} < a^x$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt*.

Bij *onbepaald grote toename* van x , dus als x tot *oneindig nadert*, notatie $x \rightarrow \infty$, dan daalt a^x monotoon, onbepaald

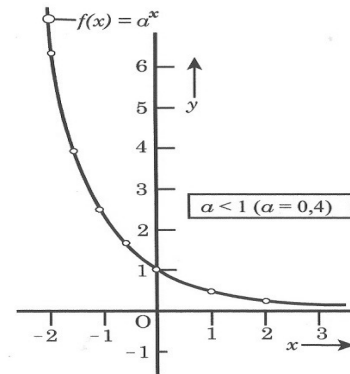
dicht tot nul omdat $0 < a < 1$. De waarde nul wordt nooit

bereikt, want er bestaat geen reële x waarvoor a^x ($a \neq 0$) gelijk

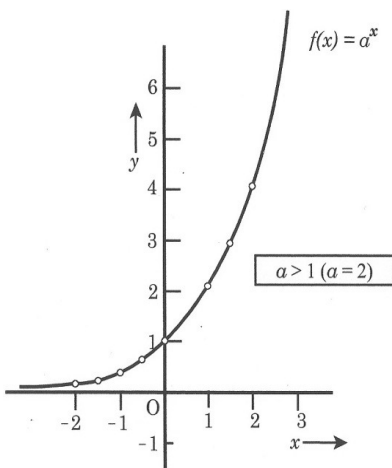
is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichtert tot

de *positieve x-as* (rechts van O) nadert *zonder hem ooit te raken*:

De x -as heet dan een (horizontale) **asymptoot** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)



2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)



Als $a > 1$ dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als

$f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a > 1$ is dan

$a \cdot a^x > a^x$ dus $a^{x+1} > a^x \Rightarrow f(x) = a^x$ is dan *monotoon stijgend*.

Bij *onbepaald grote afname* van x , dus *waarden* van x wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.

Bij *onbepaald grote afname* van x , dus als x tot $-\infty$ nadert, dan a^x onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt,

omdat er geen reële x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij

afnemende x de grafiek steeds dichtert tot de *negatieve x-as* (links van O) naderen:

De x -as is ook hier hier een *horizontale asymptoot*.

- Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**. Het **groeipercentage** is dan 11%.

Werk je met de groeifactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

	164	183 $= 1,11 \times 164$	203 $= 1,11 \times 164$	227 $= 1,11 \times 164$	254 $= 1,11 \times 164$	282 $= 1,11 \times 164$
<i>aantal</i> $\times 10^6$						
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 na t perioden van 4 jaar ($t = 0, 1, 2, 3, 4$) de *beginwaarde* 164 (dus het inwonertal na $t = 0$ perioden) met een factor $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$ is toegenomen, dus t perioden na de startwaarde 160 is die waarde toegenomen tot $1,11^t \times 164$.

Deze toename wordt *exponentiële groei* genoemd.

Noemen we de **startwaarde** $164 = N(0)$ en de **groeifactor per periode** $1,11 = g$ dan is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie* van t .

Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is, is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$ ($N(0) = \text{startwaarde}$)

Toepassingen:

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- de *groeifactor* per kwartier
- de *groeifactor* en het *groeipcentage* per uur
- het *groeipcentage* per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot $1,12 \times$ de startwaarde ($= 1$).

De *groeifactor per kwartier* is dan $1,12 : 1 = 1,12$.

b. De *groeifactor per uur* is $1,12^4 = 1,574$; het *groeipcentage* is dan **57,4%**

c. De *groeifactor* in vijf minuten ($= 1/3$ kwartier) is $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$ dus het *groeipcentage* per vijf minuten is dan $\approx 3,85\%$

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.

Bereken *groeifactor* en *groeipcentage* per uur en de *groeifactor* per dag.

De *groeifactor* g is in vier uur $\frac{130.000}{50.000} = 2,6$, dus *per uur* $(2,6)^{\frac{1}{4}} \approx 1,270$.

Het *groeipcentage* per uur is dan $\approx 27\%$

Per dag is dan de *groeifactor* $1,270^{24} \approx 310$.

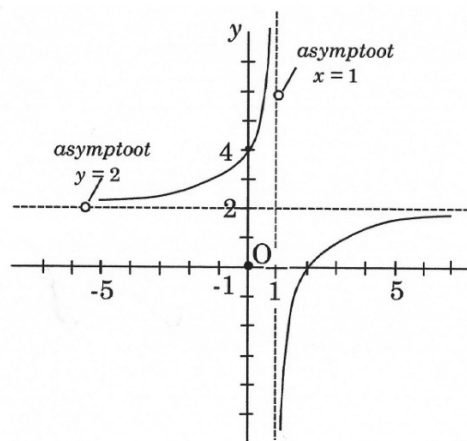
6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtsfuncties zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen. Hiervan twee voorbeelden:

1. $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is. Verder volgt uit $x = 0 \Rightarrow y = 4$ en uit $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$ dus $x = 2$ zodat de grafiek de x -as snijdt in het punt (2,0) en de y -as in (0,4).



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je (na kegelsneden op blz.168) zult herkennen als de *twee takken* van een *hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ en dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken naderen tot de lijn $x = 1$. De functie heeft dus een *horizontale asymptoot* $y = 2$ en een *verticale asymptoot* $x = 1$. (Gr.'symptootos' = samenvallend). De functie heet **discontinu** in het punt met $x = 1$.

Toelichting asymptoten:

- Hoe dichter x tot de waarde 1 nadert (van links of van rechts), hoe dichter de noemer $x - 1$ tot nul nadert en hoe dichter $f(x)$ tot de limiet $\pm \infty$ nadert, want hoe kleiner de noemer, hoe groter de waarde van $y = \frac{2x-4}{x-1}$. De lijn $x = 1$ heet *verticale asymptoot* van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

- Kies je voor x : $x = \pm 10^{100}$ (= 1 googol, grootst benoemde getal in de wiskunde dat binnen het vwo vaak als benadering voor oneindig = ∞ wordt gebruikt.), dan is:

$$y = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2 \cdot \pm 10^{100} - 4}{\pm 10^{100} - 1} \approx \frac{2 \cdot \pm 10^{100}}{\pm 10^{100}} \approx 2.$$

Als dus x nadert tot $\pm \infty$ dan nadert de functiewaarde van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ onbepaald dicht tot 2.

De lijn $y = 2$ heet dan een *horizontale asymptoot* van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

2. $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ in $x = -1$ onderbroken is. De functie is dus *discontinu* in $x = -1$.

- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$

en $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$, dus het punt $(0; 0,5)$.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met

$y = 0$, dus als $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ met twee *samenvallende wortels*: $x = 1$.

Punt $(1, 0)$ is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.

- De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:

Als x van links nadert tot -1 ($x < -1$), dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1-\delta)+1 = -\delta$ dus *vanaf links* tot 0.

De waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan tot $-\infty \Rightarrow x = -1$ is een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

- Ook van de rechtertak is de lijn $x = -1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1 ($x > -1$) dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1+\delta)+1 = \delta$ dus tot 0. *)

De waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan *van rechts* tot $+\infty$ dus $x = -1$ is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ als x tot plus of min oneindig nadert niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} 0,5x - 1,5 \\ x+1 \overline{) 0,5x^2 + 0,5x} \end{array}$$

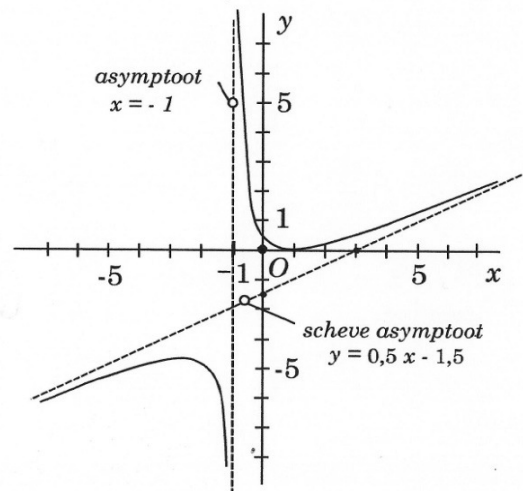
$$\begin{array}{r} -1,5x - 1,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $y = 0,5x - 1,5$ omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = 0$

De lijn met vergelijking $y = 0,5x - 1,5$ heet nu een *scheve asymptoot* van de gegeven functie.



* Het getal δ (delta) wordt algemeen gebruikt om een zeer kleine, (tot nul naderende) positieve waarde, aan te geven.

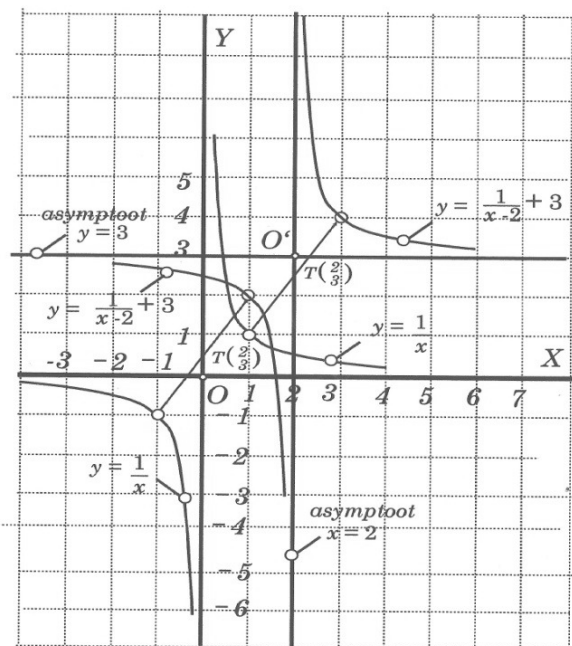
3. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie $T(2,3)$ toe te passen op de *standaardhyperbool* $g: y = \frac{1}{x}$ volgens de translatietransformatie-regel (blz.13).

Horizontale asymptoot van $g: y = \frac{1}{x}$ is de x -as met vergelijking $y = 0$, verticale asymptoot is de y -as met vergelijking $x = 0$.

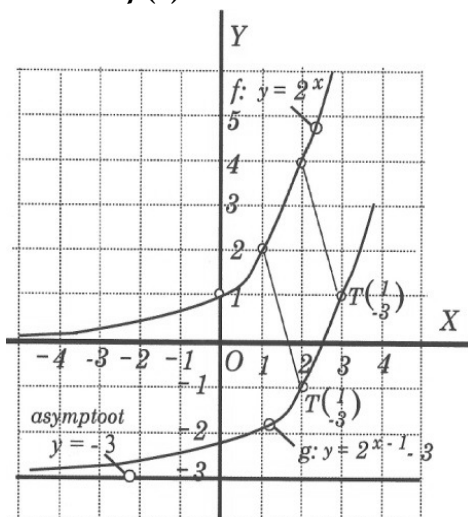
Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $y = 0$ over in $y = 0 + 3 = 3$ en de vergelijking $x = 0$ in $x = 0 + 2 = 2$

Van $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ is de lijn $y = 2$ dan *horizontale asymptoot* en $x = 2$ de *verticale asymptoot*.



7. Grafieken van exponentiële functies

1. $f(x) = 2^{x-1} - 3$



Deze exponentiële functie ontstaat uit de standaardfunctie $g: y = 2^x$ via de translatie $T(1, -3)$.

Horizontale asymptoot van $f: y = 2^x$ is de x -as, dus de lijn $y = 0$, de *horizontale asymptoot* van $g: y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $y = 0 - 3 = -3$.

Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$ bestaat niet.

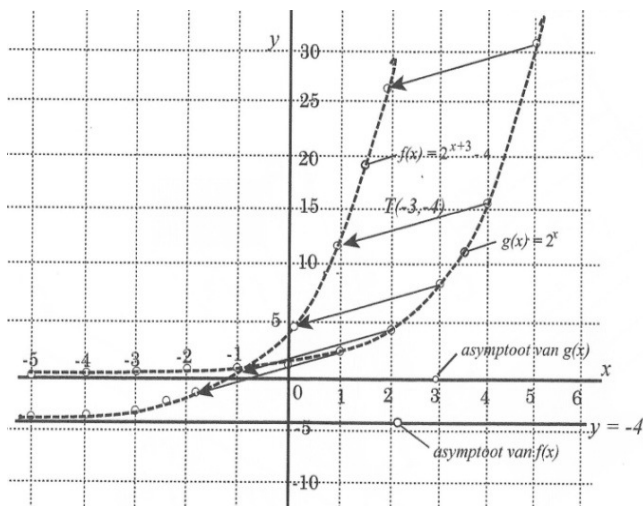
Het *domein* van f (alle waarden van x waarvoor de functie 2^x is gedefinieerd) is $\mathbb{R}$, dus is $\mathbb{R}$ ook het *domein* van g .

Het *bereik* van f (alle functiewaarden die 2^x kan aannemen) is $(0, \infty)$, dus is $\langle -3, \infty \rangle$ het *bereik* van g .

2. $f(x) = 2^{x+3} - 4$

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie?
- Bepaal het domein en het bereik van f .

De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$ via de translatie $T(-3, -4)$. Volgens 7.1 hierboven is het domein van $g(x) = 2^x = \mathbb{R}$ dus is ook $\mathbb{R}$ het *domein* van $f: y = 2^{x+3} - 4$. Het bereik van $g(x) = 2^x$ is $(0, \infty)$, dus van $f: y = 2^{x+3} - 4$ is het *bereik* $\langle -4, \infty \rangle$.



Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld $17^x = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet exact oplossen. Alleen door 'proberen' met een rekenmachine is een *benadering* mogelijk.

Men heeft daarom het begrip *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme* van een getal a is de *exponent* p waarvoor $10^p = a$.

Definitie: **$\log a = p$ als $10^p = a$.**

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de *logaritme* van $100 = 2$. Notatie: $\log 100 = 2$.

$1000 = 10^3$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$; $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De *logaritmen* van getallen a met **$a \leq 0$ bestaan niet** want er is geen getal p waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$. (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0)

Briggs berekende de *logaritmen* van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal 10 ^{*)}

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal* g voor *logaritmen* dienen, maar in feite **elk positief reëel getal mits $\neq 1$** .

Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met als *grondtal* 3 zeggen: $\log 9 = 2$.

Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^3\log 9 = 2$.

Zo is ${}^5\log 125 = 3$ want $5^3 = 125$; ${}^{1/3}\log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, etc.

Men definieert dan: **${}^g\log a = x$ als $g^x = a$** ($g > 0$ als *grondtal* van een exponentiële functie volgens blz.15). Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als $a \leq 0$ dan bestaat ${}^g\log a$ niet**

Definitie:

De ${}^g\log$ *logaritme van een getal* a is gedefinieerd door: **${}^g\log a = x$ als $g^x = a$** (a en $g > 0$, $g \neq 1$)

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal* g van de *logaritmen* het '**Getal van Euler**' = e in. ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828...$)

Logaritmen met dit *grondtal* noemt men Neperiaanse- of *natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.

Notatie voor *logaritmen met grondtal* e is **$\ln x$** , zodat dus **$\ln x = {}^e\log x$** .

$\log x$ is de Briggse *logaritme* van x met 10 als *grondtal*, dus $\log x = {}^{10}\log x$,

$\ln(x)$ is de *natuurlijke logaritme* van x met e als *grondtal* dus $\ln x = {}^e\log x$.

Als $\log x = p$, dan is $10^p = x$, als $\ln x = p$ dan is $e^p = x$

^{*)} Zo berekende Briggs *handmatig 27 wortels uit 10*: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in *zestien decimalen* nauwkeurig!. Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766...$, is $\log 3,16227766... = 0,5$; $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941...$ dus $\log 1,77827941... = 0,25$ enz.. En dat was nog maar een begin...

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

1. ${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$
2. ${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$
3. ${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$
4. a : ${}_g \log(g^x) = x$ en b : $g {}_g \log x = x$

Bewijs:

1. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is per definitie $g^p = a$ en $g^q = b$ met gevolg:
 $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$, zodat ${}_g \log ab = p + q$ dus: **${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$** .
2. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is $g^p = a$, $g^q = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$ zodat
 ${}_g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$ **${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$** .
3. Als ${}_g \log a = p$ dan $g^p = a$ en $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}_g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}_g \log a$ dus
 ${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$
4. a : ${}_g \log(g^x) = x$. ${}_g \log g$ (volgens 3) $= x \cdot 1 = x$ (want ${}_g \log g = 1$ omdat $g^1 = g$) $\Rightarrow$
 ${}_g \log(g^x) = x$.
 b : Noem ${}_g \log x = p$ dan $g^p = x$ zodat $g {}_g \log x = g^p = x \Rightarrow$ **$g {}_g \log x = x$** .

c. Inverse functies

Het *argument* x van een functie $f(x)$ kan zelf een functie $g(x)$ van x zijn zodat $f(x) = f(g(x))$.

Punt a wordt in de figuur door de functie f_1 afgebeeld op het punt b dus **$b = f_1(a)$** .

Stel nu dat het f_1 beeld b van a , dus $b = f_1(a)$ door de functie f_2 wordt 'terug' afgebeeld op a , dan is **$f_2(b) = f_2(f_1(a)) = f_2 f_1(a) = a$** (1)

Door de functie f_2 wordt het punt a afgebeeld op c , zodat **$c = f_2(a)$** .

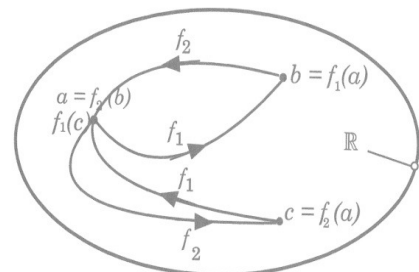
Stel nu dat ook dit f_2 -beeld c van a door de functie f_1 weer wordt 'terug' afgebeeld op a , dan is dus **$f_1(c) = f_1(f_2(a)) = f_1 f_2(a) = a$** (2)

Volgens (1) en (2) geldt dan voor de functies f_1 en f_2 dat

$$f_1 f_2(a) = f_2 f_1(a) = a.$$

Als dit geldt voor alle punten $x = a$ binnen het domein van f_1 en f_2

(hier $\mathbb{R}$), dan zijn f_1 en f_2 elkaars **inverse functies**.



Zijn f en g twee functies in $\mathbb{R}$ waarbij voor elk element x geldt dat
 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dan zijn f en g elkaars inverse functies

Zo zijn machtsverheffen $f(x) = x^p$ en worteltrekken $g(x) = \sqrt[p]{x}$ elkaars inverse functies, want voor elk getal x is **$f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$** en **$g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$** . Ook geldt als $f(b) = a$ dan is $g(a) = b$ dus als $f(x) = f(4) = 4^p$ dan is $g(x) = g(4^p) = \sqrt[p]{4^p} = 4$.

Eigenschap:

De logaritmische functie $f(x) = {}_g \log x$ en de exponentiële
 functie $h(x) = g^x$ zijn elkaars inverse functies

Bewijs:

Noem $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ dan is: $f(h(x)) = f(g^x) = {}^g \log(g^x) = x$ (eig. 4-a) ... (1)

Ook is $h(f(x)) = h({}^g \log x) = g^{{}^g \log x} = x$ (eigenschap 4-b) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan $f(h(x)) = h(f(x)) = x$ dus zijn $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ per definitie elkaars **inverse functies**.^{*)}

NB: Kies je voor het *grondtal g van de logaritme* en het *grondtal g van de macht* het getal e van Euler dan blijkt hieruit dat ook ${}^e \log x = \ln(x)$ en e^x elkaars inverse functies zijn.

*Als f en g elkaars inverse functies zijn,
dan zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x*

Bewijs:

Getekend zijn de grafieken van de functies $f(x) = g^x$ en zijn inverse $g(x) = {}^g \log x$

$P(a,b)$ is een willekeurig punt van $f(x)$ met $f(a) = b$.

Omdat $g(x)$ de inverse functie is van $f(x)$ ligt er een punt

$Q = (b,a)$ op $g(x)$ dus met $g(b) = a$. Verder geldt:

$PR = QR = |b - a|$, dus $\triangle PRQ$ is gelijkbenig.

De lijn $y = x$ gaat door R, want R is het punt (a,a) .

en omdat QR en PR evenwijdig zijn met resp. de x-as en de y-as is $\triangle PRQ$ rechthoekig in R.

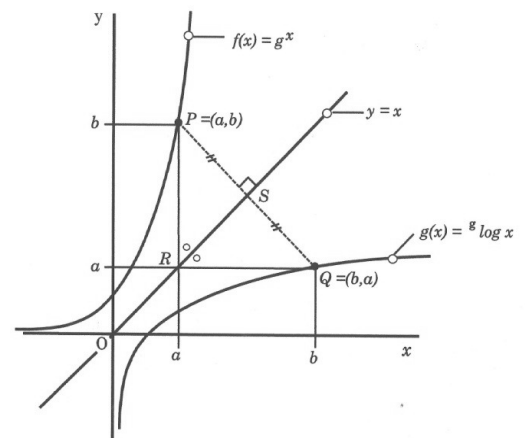
Verder maakt de lijn $y = x$ gelijke hoeken met de x-as en de y-as, dus ook met RQ en RP zodat RS (op $y = x$)

middelloodlijn is van PQ, met gevolg:

P en Q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Omdat $P(a,b)$ een willekeurig punt is op $f(x)$ geldt dit voor alle punten van f en g dus:

f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x als f en g elkaars inverse functies zijn.



Opgaven:

1. Bewijs dat algemeen geldt: ${}^s \log x = \frac{\log x}{\log s}$. (eigenschap 5)

Noem ${}^s \log x = p$ dan is $x = g^p$. Noem $\log x = q$ dan is $x = 10^q$ zodat $g^p = 10^q = x$... (1)

Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r$ zodat $x = g^p = (10^r)^p = 10^{rp} = 10^q$ volgens (1)

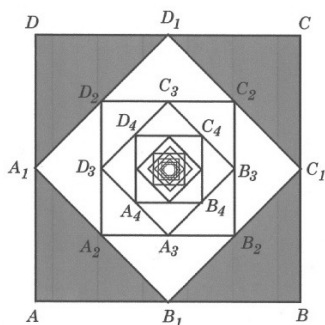
dus $rp = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$ ofwel ${}^s \log x = \frac{\log x}{\log s}$.

Dankzij deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR via

Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden. Bij voorbeeld: ${}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} = 2,5789$

^{*)} Omdat voor elke x van het domein van twee inverse functies f en g geldt dat $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ vormen de samengestelde functies $f(g(x))$, kortweg f g (x) en $g(f(x)) (= g f(x))$ een **identiteit E** dus $f g(x) = g f(x) = E x$, waarin $E = 1$ in algebraïsche functies. In veel wiskundeboeken noteert men daarom twee inverse functies als f en f^{-1} . In deze notatie geldt dan: $f f^{-1}(x) = f^{-1} f(x) = E x = x$

2. De middens van de zijden van een vierkant $ABCD$ zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande figuur. De zijde van $ABCD = 8$.
Bij welke index n zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van $ABCD = 8^2 = 64$, de oppervlakte van $A'B'C'D' = \frac{1}{2} \times O_{ABCD}$ en ook van *elk* volgend vierkant is steeds de oppervlakte de helft van die van het vorige vierkant.

Van $A_nB_nC_nD_n$ is dan $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n$.

Je berekent nu wanneer $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n = 0,001$ uit de vergelijking **$\log (64 \times (\frac{1}{2})^n) = \log 0,001 = -3$** . (1)

Omdat $\log ab = \log a + \log b$ en $\log a^n = n \cdot \log a$ volgt uit (1):

$$\log 64 + n \cdot \log \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow 1,80168 + n \cdot -0,30103 = -3 \Rightarrow$$

$$4,80168 = -0,30103 n \Rightarrow n = 15,9 \Rightarrow$$

De oppervlakte van $A_{16}B_{16}C_{16}D_{16}$ is kleiner dan 0,001.

Controle: $64 \times (\frac{1}{2})^{16} = 0,000976 (< 0,001)$ en $64 \times (\frac{1}{2})^{15} = 0,001953 (> 0,001)$.

9. Goniometrische functies

a. Definities in de eenheidscirkel

In de hoekmeetkunde worden *sinus*, *cosinus* en *tangens* van **hoeken** $< 90^\circ$ gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige driehoek*. (blz.142). Per definitie is dan

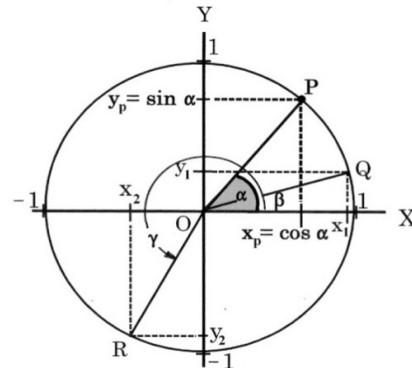
sinus ($\sin \alpha$) = $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$, **cosinus** ($\cos \alpha$) = $\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$ en

tangens α ($\tan \alpha$) = $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$.

Om sinus en cosinus te definiëren voor elke **willekeurige hoek** α heeft men de '**eenheidscirkel**' ingevoerd, een cirkel met **straal** $R = 1$ en middelpunt O in de oorsprong van het XOY stelsel. Elke hoek α wordt daarin voorgesteld door de hoek XOP die het '**vaste been**' OX maakt met de '**voerstraal**' OP van $\angle XOP$. Zo is dan $\alpha = 0$ als voerstraal OP samenvalt met OX . Als $\alpha > 0$ dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α geroteerd **in tegenwijzerzin**, als $\alpha < 0$, dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α geroteerd **in wijzerzin**.

Sin α en **cos** α zijn nu gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt $P(x_p, y_p)$ van de voerstraal OP en wel zo dat $x_p = \cos \alpha$ en $y_p = \sin \alpha$

Omdat nu α elke reële waarde $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) kan aannemen is het domein van $\sin \alpha$ en $\cos \alpha = \mathbb{R}$, het bereik is $[-1,1]$



Sinus α en *cosinus* α zijn gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt P van de voerstraal OP van de hoek α in de eenheidscirkel. ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Er geldt: *sinus* α = de 'ordinaat' y_p , *cosinus* α = de 'abscis' x_p

Voorbeelden: Van $\angle XOP = \alpha$ zijn **sin** $\alpha = y_p$ en **cos** $\alpha = x_p$ getekend: **cos** $\angle XOQ = \cos \beta = x_1$,

sin $\angle XOQ = \sin \beta = y_1$; **cos** $\angle XOR = \cos \gamma = x_2$, **sin** $\angle XOR = \sin \gamma = y_2$. Lees ook af: $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 270^\circ = \sin (-90^\circ) = -1$, $\cos 270^\circ = \cos (-90^\circ) = 0$, $\sin(360^\circ) = \sin 0^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$.

De **tangens** van hoek α in een rechthoekige driehoek wordt gedefinieerd als de verhouding overstaande rechthoekszijde van α . Overeenkomstig hiermee geldt per definitie in de eenheidscirkel: $\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p}$ ($x_p \neq 0$) dus voor *elk* reëel getal α geldt:

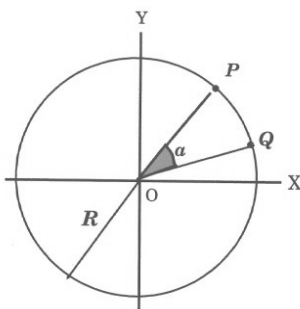
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ). \text{ Het bereik van } \tan \alpha = \mathbb{R}.$$

NB: De functies $\sin x$ en $\cos x$ zijn geen '1-1 afbeeldingen', dat wil zeggen: $\sin 30^\circ = 0,5$ betekent **niet**: Als $\sin x = 0,5$ dan is $x = 30^\circ$. Immers als $\sin x = 0,5$ dan maakt de voerstraal een hoek van 30° met de positieve X, as, maar dat is ook bijvoorbeeld zo nadat de voerstraal over $k \times 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) om O gedraaid is, en ook als $x = 150^\circ = \sin x = 0,5$.
Zo is $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ maar ook $\cos(30^\circ + k \times 360^\circ)$ en $\cos(-30^\circ) = \sqrt{3}/2$.

b. De radiaal

De **standaardeenheid** van hoekgrootten in de wiskunde is één **radiaal**.

Een hoek van 1 radiaal is de grootte van de middelpuntshoek die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel



De grootte van een hoek in radialen is dus gelijk aan de verhouding $\frac{\text{lengte van de bijbehorende cirkelboog van een middelpuntshoek}}{\text{lengte van de straal } R \text{ van de cirkel}}$

De **dimensie** van de radiaal is dan $\frac{[m]}{[m]} = 1$. *)

De cirkel (straal = R) heeft een booglengte (= omtrek) van $= 2\pi \cdot R$, dus hoort hierbij een middelpuntshoek in radialen van $\frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi$

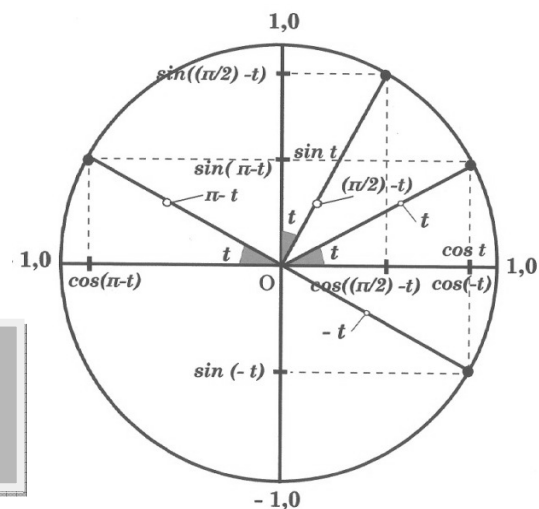
met gevolg: $360^\circ = 2\pi$. Als $PQ = \frac{3}{4} R$ dan is $\angle POQ = \alpha = \frac{\frac{3}{4} R}{R} = \frac{3}{4}$.

hoek α in radialen	2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	1	$\pi/180$
hoek α in graden	360°	270°	180°	90°	$180/\pi^\circ$	1°

c. Herleidingformules

Vaak worden in de *goniometrie* ('hoekmeetkunde') *herleidingformules* gebruikt, zoals die
- voor het **complement** van een hoek (aanvulling tot $90^\circ = \pi/2$ radialen), voor het **supplement** van een hoek (aanvulling tot $180^\circ = \pi$ radialen), voor *dubbele- en halve* hoeken en voor *som of verschil* van twee hoeken.
Uit de getekende eenheidscirkel kan je al direct aflezen:

$$\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t & \cos(-t) &= \cos t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t & \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \\ \sin(\pi - t) &= \sin t & \cos(\pi - t) &= -\cos t \end{aligned}$$



*) Je spreekt daarom niet van een hoek ϕ van bijv. 5 radialen, maar **kortweg van $\phi = 5$** .
In de GR-TI83 kan je de eenheid van hoeken instellen op graden (Degrees) of radialen (Radians).
va de knop MODE. Standaard laat je die instelling op radialen staan..

Ook volgt direct uit de definitie van $\sin t$ en $\cos t$ de eigenschap:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Immers:

Volgens *Pythagoras* geldt voor de coördinaten x_p, y_p van punt P van de voerstraal in de eenheidscirkel, dat: $x_p^2 + y_p^2 = OP^2 = R^2 = 1$, zodat **$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$** *)

- Sinus en cosinus van som en verschil

1. $\sin(t + u) = \sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u$
2. $\cos(t + u) = \cos t \cdot \cos u - \sin t \cdot \sin u$
3. $\sin(t - u) = \sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u$
4. $\cos(t - u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u$
5. $\tan(t + u) = \frac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t \cdot \tan u}$

Bewijs:

1. In de figuur zijn de rechthoekige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle ADB$ getekend waarin $\angle BAC = t$, $\angle BAD = u$ en $|AC| = 1$. Zijde DB van $\triangle ADB$ is verlengd met BE en is de rechthoekige $\triangle BEC$ ontstaan.

Omdat in $\triangle ADB$: $\angle ABD = 90^\circ - u$, geldt in

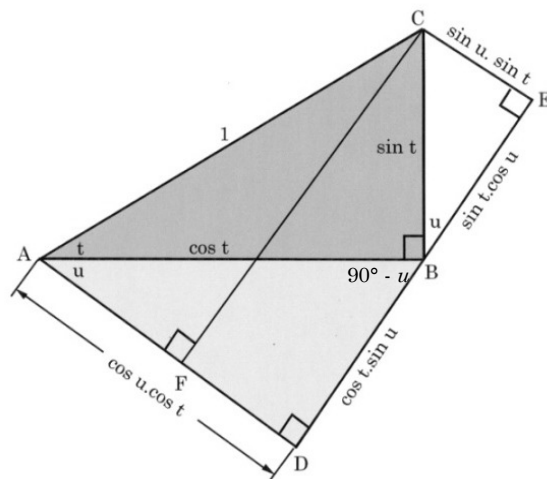
$\triangle BEC$ dat $\angle CBE = 180^\circ - (90^\circ - u) - 90^\circ = u$.

In $\triangle BEC$ is $BE = BC \cdot \cos u$ en omdat in $\triangle ABC = BC = 1$, $\sin t$ is dan **$BE = \sin t \cdot \cos u$** ... (a)

In $\triangle ADB$ is $BD = AB \cdot \sin u$ en in $\triangle ABC = AB = 1 \cdot \cos t$ zodat **$BD = \cos t \cdot \sin u$** (b)

Hulplijn $CF \perp AD$, dus $CF \parallel ED$.

Uit $\triangle AFC$ met CF loodrecht op AD , volgt dat $\sin \angle CAF = \sin(t + u) = CF/1 = DE = BE + BD$ dus volgens (a) en (b): **$\sin(t + u) = \sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u$** zoals was te bewijzen.



2. In de figuur in $\triangle AFC$ is $\cos \angle CAF = \cos(t + u) = AF/AC = AF/1 = AF$.

Ook is: $AF = AD - DF = AD - CE$ zodat **$AF = \cos(t + u) = \cos u \cdot \cos t - \sin u \cdot \sin t$** .

3. Vervang je u door $-u$ in eigenschap 1. dan ontstaat

$\sin(t + (-u)) = \sin t \cdot \cos(-u) + \cos t \cdot \sin(-u)$ waarin $\cos(-u) = \cos u$ en $\sin(-u) = -\sin(u)$,

dus **$\sin(t - u) = \sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u$** .

4) Zo volgt uit eigenschap 2.: $\cos(t - u) = \cos(t + (-u)) = \cos t \cdot \cos(-u) - \sin t \cdot \sin(-u)$

dus: **$\cos(t - u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u$** .

5) $\tan(t + u) = \frac{\tan t + \tan u}{\tan t \cdot \tan u}$ bewijs zie blz.28, opgave 2.