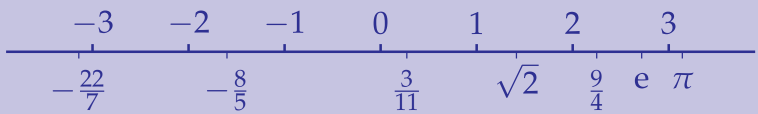
I Getallen



Dit deel gaat over het rekenen met getallen. Ze komen in allerlei soorten voor: positieve getallen, negatieve getallen, gehele getallen, rationale en irrationale getallen. De getallen $\sqrt{2}$, π en e zijn voorbeelden van irrationale getallen. In de hogere wiskunde wordt ook met imaginaire en complexe getallen gewerkt, maar in dit boek zullen we ons beperken tot de *reële getallen*, dat wil zeggen de getallen die je meetkundig voor kunt stellen als punten op een getallenlijn.

In de eerste twee hoofdstukken worden de rekenvaardigheden van de basisschool (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van gehele getallen en breuken) in kort bestek opgehaald. Wie hier moeite mee heeft, doet er verstandig aan om eerst ons *Basisboek rekenen* (Pearson Education, 2007) door te werken.

1 Rekenen met gehele getallen

Voer de volgende berekeningen uit:

1.1

a.
$$\begin{array}{rl} 873 & \\ 112 & \\ 1718 & \\ 157 & \\ 3461 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 1578 & \\ 9553 & \\ 7218 & \\ 212 & \\ 4139 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

1.2

a.
$$\begin{array}{rl} 9134 & \\ 4319 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4585 & \\ 3287 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rl} 7033 & \\ 1398 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

1.3 Bereken:

a. 34×89
b. 67×46
c. 61×93
d. 55×11
e. 78×38

1.4 Bereken:

a. 354×83
b. 67×546
c. 461×79
d. 655×102
e. 178×398

Bereken het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

1.5

a. $154 : 13$
b. $435 : 27$
c. $631 : 23$
d. $467 : 17$
e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$
b. $6463 : 101$
c. $7682 : 59$
d. $6178 : 451$
e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$
b. $4534 : 97$
c. $63321 : 23$
d. $56467 : 179$
e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$
b. $13467 : 101$
c. $35641 : 99$
d. $16155 : 215$
e. $92183 : 83$

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De rij $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ is de rij van de *positieve gehele getallen*. Met deze rij leert ieder kind tellen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van zulke getallen zonder rekenmachine leer je op de basisschool. Hiernaast staan voorbeelden.

$$
\begin{array}{rl}
341 & \\
295 & \\
718 & \\
12 & \\
1431 & \\
\hline
2797 & +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
8135 & \\
3297 & \\
\hline
4838 & -
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
431 & \\
728 & \\
\hline
3448 & \times \\
862 & \\
3017 & \\
\hline
313768 &
\end{array}
$$

Delen met rest

Delen zonder rekenmachine gaat met een *staartdeling*. Hiernaast zie je de staartdeling voor 83218 : 37, dat wil zeggen 83218 gedeeld door 37. Het *quotiënt* 2249 vind je rechtsboven, en de *rest* 5 onderaan de staart. De staartdeling leert dat

$$83218 = 2249 \times 37 + 5$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

Het rechterlid wordt meestal vereenvoudigd tot $2249\frac{5}{37}$, zodat we krijgen

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}$$

$$
\begin{array}{rlll}
37 & / & 83218 & \backslash \quad 2249 \\
 & & 74 & \qquad \uparrow \\
\cline{3-3}
 & & 92 & \quad \text{quotiënt} \\
 & & 74 & \\
\cline{3-3}
 & & 181 & \\
 & & 148 & \\
\cline{3-3}
 & & 338 & \\
 & & 333 & \\
\cline{3-3}
 & & 5 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1.9
- a. 24
- b. 72
- c. 250
- d. 96
- e. 98

1.10
- a. 288
- b. 1024
- c. 315
- d. 396
- e. 1875

1.11
- a. 972
- b. 676
- c. 2025
- d. 1122
- e. 860

1.12
- a. 255
- b. 441
- c. 722
- d. 432
- e. 985

1.13
- a. 2000
- b. 2001
- c. 2002
- d. 2003
- e. 2004

1.14
- a. je geboortejaar
- b. je postcode
- c. je pincode

Bepaal alle delers van de volgende getallen. Werk nauwkeurig en systematisch, want als je niet goed oplet, mis je er snel een paar. Het is handig om eerst de priemontbinding van zo'n getal op te schrijven.

1.15
- a. 12
- b. 20
- c. 32
- d. 108
- e. 144

1.16
- a. 72
- b. 100
- c. 1001
- d. 561
- e. 196

Delers en priemgetallen

Soms gaat een deling op, dat wil zeggen dat de rest nul is. Zo is bijvoorbeeld $238 : 17 = 14$. Dan geldt dus $238 = 14 \times 17$. De getallen 14 en 17 heten *delers* van 238 en de schrijfwijze $238 = 14 \times 17$ heet een *ontbinding in factoren* van 238. De woorden 'deler' en 'factor' zijn in dit verband synoniemen.

Van de beide delers is 14 zelf ook weer te ontbinden, namelijk als $14 = 2 \times 7$, maar verder kan de ontbinding van 238 niet worden voortgezet, want 2, 7 en 17 zijn alle drie *priemgetallen*, dat wil zeggen getallen die niet in kleinere factoren zijn te ontbinden. Daarmee is de *ontbinding in priemfactoren* van 238 gevonden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Omdat $238 = 1 \times 238$ ook een ontbinding van 238 is, zijn 1 en 238 ook delers van 238. Elk getal heeft 1 en zichzelf als deler. De interessante, *echte* delers zijn echter de delers die groter dan 1 zijn en kleiner dan het getal zelf. De priemgetallen zijn de getallen die groter dan 1 zijn en geen echte delers hebben. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Elk geheel getal dat groter dan 1 is, kan ontbonden worden in priemfactoren. Hiernaast staat in voorbeelden geïllustreerd hoe je zo'n *priemontbinding* vindt door systematisch naar steeds grotere priemdelers te zoeken. Telkens als je er een vindt, deel je die uit, en ga je met het quotiënt verder.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Je bent klaar als je op 1 bent uitgekomen. De priemfactoren staan rechts. Uit de drie ladderdiagrammen lezen we de priemontbindingen af:

$$\begin{array}{rcccl} 180 & = & 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 & = & 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 & = & 3 \times 3 \times 5 \times 13 & = & 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 & = & 3 \times 7 \times 11 \times 13 & & \end{array}$$

Je ziet dat het handig is om priemfactoren die vaker dan één keer voorkomen, samen te nemen als een macht: $2^2 = 2 \times 2$ en $3^2 = 3 \times 3$. Nog meer voorbeelden (maak zelf de ladderdiagrammen):

$$\begin{array}{rcccl} 120 & = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 & = & 2^3 \times 3 \times 5 \\ 81 & = & 3 \times 3 \times 3 \times 3 & = & 3^4 \\ 48 & = & 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 & = & 2^4 \times 3 \end{array}$$

Bepaal de grootste gemene deler (ggd) van:

1.17

a. 12 en 30
b. 24 en 84
c. 27 en 45
d. 32 en 56
e. 34 en 85

1.18

a. 45 en 225
b. 144 en 216
c. 90 en 196
d. 243 en 135
e. 288 en 168

1.19

a. 1024 en 864
b. 1122 en 1815
c. 875 en 1125
d. 1960 en 6370
e. 1024 en 1152

1.20

a. 1243 en 1244
b. 1721 en 1726
c. 875 en 900
d. 1960 en 5880
e. 1024 en 2024

Bepaal het kleinste gemene veelvoud (kgv) van:

1.21

a. 12 en 30
b. 27 en 45
c. 18 en 63
d. 16 en 40
e. 33 en 121

1.22

a. 52 en 39
b. 64 en 80
c. 144 en 240
d. 169 en 130
e. 68 en 51

1.23

a. 250 en 125
b. 144 en 216
c. 520 en 390
d. 888 en 185
e. 124 en 341

1.24

a. 240 en 180
b. 276 en 414
c. 588 en 504
d. 315 en 189
e. 403 en 221

Bepaal de ggd en het kgv van:

1.25

a. 9, 12 en 30
b. 24, 30 en 36
c. 10, 15 en 35
d. 18, 27 en 63
e. 21, 24 en 27

1.26

a. 28, 35 en 49
b. 64, 80 en 112
c. 39, 52 en 130
d. 144, 168 en 252
e. 189, 252 en 315

De ggd en het kgv

Twee getallen kunnen delers gemeen hebben. De *grootste gemene deler* (ggd) is, zoals de naam al zegt, hun grootste gemeenschappelijke deler. Wanneer de ontbinding in priemfactoren van beide getallen bekend is, kan de ggd hieruit direct worden afgelezen. Zo hebben we op bladzijde 9 de volgende priemontbindingen gevonden:

$$\begin{aligned} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45 \\ \text{ggd}(180, 3003) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \text{ggd}(585, 3003) &= \text{ggd}(3^2 \times 5 \times 13\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39 \end{aligned}$$

Het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) van twee getallen is het kleinste getal dat zowel een veelvoud van het ene getal, als van het andere getal is. Met andere woorden, het is het kleinste getal dat door allebei die getallen deelbaar is. Ook het kgv kan uit de priemontbindingen worden afgelezen. Zo is

$$\text{kgv}(180, 585) = \text{kgv}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340$$

Een handige eigenschap van de ggd en het kgv van twee getallen is dat hun product gelijk is aan het product van de beide getallen. Zo is

$$\text{ggd}(180, 585) \times \text{kgv}(180, 585) = 45 \times 2340 = 105300 = 180 \times 585$$

Ook van meer dan twee getallen kun je de ggd en het kgv direct uit hun priemontbindingen aflezen. Zo is

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585, 3003) &= 3 \\ \text{kgv}(180, 585, 3003) &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \;=\; 180180 \end{aligned}$$

Een slim idee

Er is een methode om de ggd van twee getallen te bepalen waarbij priemontbindingen niet nodig zijn, en die vaak veel sneller werkt. Het basisidee is dat de ggd van twee getallen ook een deler moet zijn van het *verschil* van die twee getallen. Zie je ook waarom dit zo is?

Zo moet $\text{ggd}(4352, 4342)$ ook een deler zijn van $4352 - 4342 = 10$. Het getal 10 heeft alleen maar de priemdelers 2 en 5. Het is duidelijk dat 5 geen deler is van de beide getallen, maar 2 wel, en dus geldt $\text{ggd}(4352, 4342) = 2$. Wie slim is kan zich door dit idee te gebruiken veel rekenwerk besparen!

2 Rekenen met breuken

2.1 Vereenvoudig:

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{18}{45}$

c. $\frac{21}{49}$

d. $\frac{27}{81}$

e. $\frac{24}{96}$

2.2 Vereenvoudig:

a. $\frac{60}{144}$

b. $\frac{144}{216}$

c. $\frac{135}{243}$

d. $\frac{864}{1024}$

e. $\frac{168}{288}$

2.3 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{7}$

c. $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{11}$ en $\frac{3}{4}$

e. $\frac{2}{13}$ en $\frac{5}{12}$

2.4 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

b. $\frac{3}{10}$ en $\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{6}$

d. $\frac{5}{9}$ en $\frac{7}{12}$

e. $\frac{3}{20}$ en $\frac{1}{8}$

2.5 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

d. $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{15}$ en $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ en $\frac{3}{8}$

2.6 Maak gelijknamig:

a. $\frac{2}{27}$, $\frac{5}{36}$ en $\frac{5}{24}$

b. $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{20}$ en $\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{14}$ en $\frac{7}{30}$

d. $\frac{4}{63}$, $\frac{5}{42}$ en $\frac{1}{56}$

e. $\frac{5}{78}$, $\frac{5}{39}$ en $\frac{3}{65}$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken de grootste is door ze eerst gelijknamig te maken.

2.7

a. $\frac{5}{18}$ en $\frac{6}{19}$

b. $\frac{7}{15}$ en $\frac{5}{12}$

c. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

d. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$

e. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$

2.8

a. $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{3}$

b. $\frac{14}{85}$ en $\frac{7}{51}$

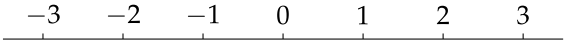
c. $\frac{26}{63}$ en $\frac{39}{84}$

d. $\frac{31}{90}$ en $\frac{23}{72}$

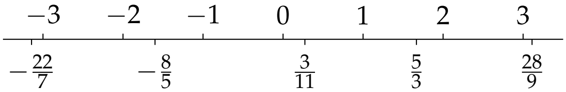
e. $\frac{37}{80}$ en $\frac{29}{60}$

Rationale getallen

De rij $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ is de rij van alle gehele getallen. Een meetkundig beeld ervan geeft de *getallenlijn* die hieronder is getekend.



Ook de *rationale getallen*, dat wil zeggen de getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, liggen op de getallenlijn. Hieronder zijn enige rationale getallen op die lijn aangegeven.



In een breuk staan twee gehele getallen, de *teller* en de *noemer*, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep. Zo is 28 de teller en 6 de noemer van de breuk $\frac{28}{6}$. De noemer van een breuk mag niet nul zijn. Een rationaal getal is een getal dat je als breuk kunt schrijven, maar die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast: als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal (ongelijk aan nul) vermenigvuldigt of door een gemeenschappelijke deler deelt, verandert de waarde ervan niet. Zo is

$$\frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \frac{-14}{-3} = \frac{70}{15}$$

Breuken als $\frac{-5}{3}$ en $\frac{22}{-7}$ schrijven we meestal als $-\frac{5}{3}$, respectievelijk $-\frac{22}{7}$. Ook gehele getallen kun je als breuk schrijven, bijvoorbeeld $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$ en $0 = \frac{0}{1}$. De gehele getallen behoren dus ook tot de rationale getallen.

Delen van teller en noemer door dezelfde factor (groter dan 1) heet *vereenvoudigen*. Zo kun je $\frac{28}{6}$ vereenvoudigen tot $\frac{14}{3}$ door teller en noemer door 2 te delen. Een breuk is *onvereenvoudigbaar* als de grootste gemene deler (ggd) van teller en noemer 1 is. Zo is $\frac{14}{3}$ een onvereenvoudigbare breuk, maar $\frac{28}{6}$ niet. Je kunt van elke breuk een onvereenvoudigbare breuk maken door teller en noemer te delen door hun ggd.

Breuken heten *gelijknamig* als ze dezelfde noemer hebben. Twee breuken kun je altijd gelijknamig maken. Voorbeeld: $\frac{4}{15}$ en $\frac{5}{21}$ zijn niet gelijknamig. Je kunt ze gelijknamig maken door ze allebei als noemer $15 \times 21 = 315$ te geven: $\frac{4}{15} = \frac{84}{315}$ en $\frac{5}{21} = \frac{75}{315}$. Maar als je als gemeenschappelijke noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers kiest, in dit geval dus $\text{kgv}(15, 21) = 105$, krijg je de eenvoudigste gelijknamige breuken, namelijk $\frac{28}{105}$ en $\frac{25}{105}$.

Bereken:

2.9

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$

e. $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$

2.10

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$

c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{9}-\frac{3}{8}$

e. $\frac{5}{11}+\frac{4}{15}$

2.11

a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{9}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{4}{15}-\frac{3}{10}$

2.12

a. $\frac{2}{45}+\frac{1}{21}$

b. $\frac{5}{27}-\frac{1}{36}$

c. $\frac{5}{72}+\frac{7}{60}$

d. $\frac{3}{34}+\frac{1}{85}$

e. $\frac{7}{30}+\frac{8}{105}$

2.13

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

2.14

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.15

a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.16

a. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{1}{18}-\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$

d. $\frac{3}{14}-\frac{1}{21}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

2.17

a. $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}$

b. $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

c. $\frac{8}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{2}{11}-\frac{5}{13}+\frac{1}{2}$

e. $\frac{4}{17}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$