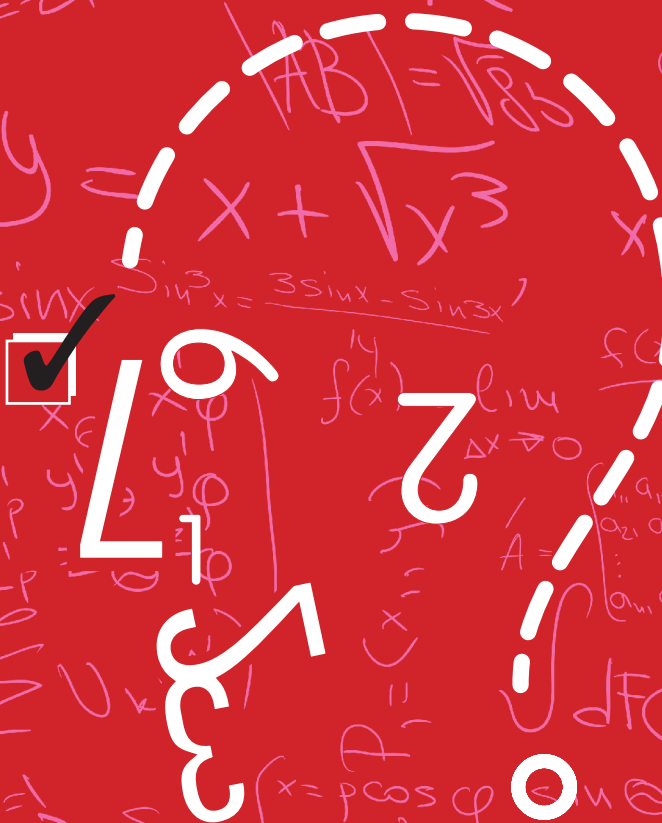


GETALLEN ONTTRAADSELD

Alex Bellos



Alles wat je moet weten
over wiskunde

GETALLEN ONTRAADSELD

ALEX BELLOS

Illustraties Andy Riley



Kosmos Uitgevers, Utrecht/Antwerpen

Inhoud

Inleiding	9
-----------	---

HOOFDSTUK NUL

Wiskundeknobbel	15
-----------------	----

Waarin de auteur probeert te achterhalen waar getallen vandaan komen – zo lang zijn niet. Hij ontmoet een man die in het oerwoud heeft gewoond, en een chimpansee die altijd in de stad heeft gezeten.

HOOFDSTUK EEN

De cultuur van het tellen	43
---------------------------	----

Waarin de auteur leert over de tirannie van tien, en over de opstandelingen die samenzweren om hem ten val te brengen. Hij bezoekt een naschoolse opvang in Tokio, waar leerlingen leren te rekenen door aan kralen te denken.

HOOFDSTUK TWEE

Zie daar!	75
-----------	----

Waarin de auteur bijna zijn naam verandert omdat een volgeling van een Griekse cultusleider het zegt. In plaats daarvan volgt hij de leer van een andere Griekse denker, stoft hij zijn passer af en vouwt hij twee visitekaartjes tot een tetraëder.

HOOFDSTUK DRIE

Iets over niets	111
-----------------	-----

Waarin de auteur naar India gaat voor een audiëntie met een hindoeïstische ziener. Hij ontdekt enkele heel langzame rekenmethodes en enkele heel snelle.

HOOFDSTUK VIER

Het leven van pi	139
------------------	-----

Waarin de auteur zich in Duitsland bevindt om getuige te zijn van de snelste vermenigvuldiging uit het hoofd aller tijden. Het is een omweg om de geschiedenis te vertellen over cirkels, een transcendent verhaal dat hem naar New York voert en naar nieuwe waardering voor het Britse muntstuk van 50 p.

HOOFDSTUK VIJF

De x -factor 171

Waarin de auteur uitlegt waarom getallen goed zijn, maar letters beter. Hij bezoekt een man in Braintree, die rekenlinialen verzamelt en hoort het tragische relaas over hun verdwijning. Bevat een uiteenzetting over logaritmen, een woordenboek van rekenmachinewoorden en een recept voor een superei.

HOOFDSTUK ZES

Speelkwartier 205

Waarin de auteur op zoek gaat naar wiskundige puzzels. Hij onderzoekt de nalatenschap van twee Chinezen – de ene was een onbenullige kluisenaar en de andere viel van de aarde – en vliegt vervolgens naar Oklahoma om een goochelaar te ontmoeten.

HOOFDSTUK ZEVEN

De geheimen van de opeenvolging 245

Waarin de auteur geconfronteerd wordt met het oneindige. Hij ontmoet een onstuitbare slak en een duivelse familie van getallen.

HOOFDSTUK ACHT

Goldfinger 271

Waarin de auteur een Londenaar met een vork ontmoet, die beweert dat hij het geheim van een mooi gebit heeft ontdekt.

HOOFDSTUK NEGEN

Toeval is een mooi ding 291

Waarin de auteur de groten van het kansspel herdenkt en gaat gokken in Reno. Hij maakt een ommetje door willekeur en belandt in een kantoorpand in Newport Beach, Californië – waar hij, als hij over de oceaan had gekeken, een loterijwinnaar op een tropisch eiland in de Grote Oceaan had kunnen zien.

HOOFDSTUK TIEN

Situatie normaal 333

Waarin de melige toegeeflijkheid van de auteur een poging is om de geboorte van de statistiek te kruiden.

HOOFDSTUK ELF

Het eind van de lijn	365
----------------------	-----

Waarin de auteur zijn reis besluit met chips en haken. Hij bezoekt Euclides nog eens en daarna een hotel met een oneindig aantal kamers dat een plotselinge toestroom van gasten niet kan verwerken.

Woordenlijst	391
--------------	-----

Bijlagen	397
----------	-----

Noten	403
-------	-----

Dankbetuiging	413
---------------	-----

Illustratieverantwoording	414
---------------------------	-----

Register	415
----------	-----

Inleiding

In de zomer van 1992 werkte ik als beginnend verslaggever bij de *Evening Argus* in Brighton. Ik bracht er mijn tijd door met het bestuderen van jonge draaideurcriminelen in de plaatselijke rechtbank, het interviewen van winkeliers over de recessie en het bijwerken van de dienstregeling van de Bluebell Railway, de historische stoomtrein, voor de servicepagina van de krant. Het was geen leuke tijd voor de jonge criminelen en de winkeliers, maar ik had er een fijne tijd.

John Major was net herkozen als premier en had, nog vol van de overwinning, een van zijn meest memorabele (en belachelijke) politieke initiatieven bekendgemaakt. In alle ernst had hij de ingebruikname aangekondigd van een speciaal informatienummer voor vragen over pylonen, die felgekleurde kegels die gebruikt worden bij wegwerkzaamheden – een nogal banaal onderwerp dat hij had opgetuigd alsof de toekomst van de wereld ervan afhing.

Maar in Brighton waren pylonen hot. Je kon nergens de stad binnenrijden zonder in wegwerkzaamheden verzeild te raken. De hoofdweg vanuit Londen, de A23, was van Crawley tot Preston Park slechts een smalle doorgang tussen afgezette weghelften door. Met veel ironie vroeg de *Argus* de lezers om te raden hoeveel pylonen er op de lange A23 stonden. De redactiechefs van de krant feliciteerden elkaar met dit briljante idee. Met deze grappig bedoelde uitdaging besteedde de krant aandacht aan het probleem, terwijl tegelijkertijd de regering op de hak werd genomen: de perfecte combinatie voor een lokale krant.

Maar de krant met de vraag lag nog maar net in de kiosken of de eerste reactie kwam binnen: een lezer had al meteen het juiste aantal pylonen geraden. Ik herinner me hoe de chefs terneergeslagen in de redactieruimte zaten, alsof een belangrijk gemeenteraadslid zojuist was overleden. Ze hadden zo graag de premier belachelijk gemaakt, maar nu hadden ze zichzelf voor gek gezet.

Ze waren ervan uitgegaan dat het onmogelijk was om het aantal pylonen op de dertig kilometer lange snelweg exact te raden. Dat was het natuurlijk niet, maar ik vermoed dat ik de enige was in het hele gebouw die inzag waarom niet. Als je ervan uitgaat dat de pylonen op gelijke afstanden van elkaar staan, hoef je maar één sommetje te maken:

aantal pylonen = (lengte van de weg : afstand tussen de pylonen) + 1

De lengte van de weg kun je meten door hem af te rijden en op je kilometerstand te letten of op een kaart te kijken. Om de afstand tussen de pylonen te bepalen, heb je niet meer nodig dan een meetlint. Zelfs als de afstanden tussen de pylonen niet precies gelijk zijn en je de lengte van de weg niet exact vast hebt kunnen stellen, dan is de berekening op grote afstanden voldoende nauwkeurig om wedstrijdje in plaatselijke kranten te winnen. En die 1 is van de eerste pylon, die vóór de eerste afstand staat. (Dit was vermoedelijk precies zoals de verkeerspolitie, die de redactie van *Argus* van het juiste antwoord had voorzien, zelf het aantal pylonen had berekend.)

Dit voorval staat me nog heel helder voor de geest omdat dit de eerste keer was in mijn leven als journalist, dat ik begreep wat de waarde was van een wiskundig ingestelde geest. Het was echter tegelijkertijd verontrustend om te beseffen hoe weinig wiskundig inzicht de meeste journalisten hebben. Het was nu niet direct erg ingewikkeld om te berekenen hoeveel pylonen er langs die weg stonden, maar voor mijn collega's was de berekening blijkbaar toch een stap te ver.

Twee jaar eerder was ik afgestudeerd in wiskunde en filosofie, zodat ik zowel van de bèta- als van menswetenschappen iets afweet. Met het besluit om in de journalistiek te gaan keerde ik, althans in eerste instantie, de eerste wetenschap de rug toe om me op de tweede te werpen. Kort na het fiasco met de pylonen verliet ik *Argus* om voor kranten in Londen te gaan werken. Uiteindelijk werd ik buitenlandcorrespondent in Rio de Janeiro. Mijn wiskundeknobbel kwam af en toe wel van pas, bijvoorbeeld als ik een Europees land wilde noemen waarvan het oppervlak het dichtst bij dat deel van het Amazoneregenwoud kwam dat nu weer kaal was gekapt, of bij het berekenen van de wisselkoersen bij weer een financiële crisis. Maar ik had toch vooral het idee dat ik de wiskunde voorgoed achter me had gelaten.

Een paar jaar geleden keerde ik naar Engeland terug. Op dat moment wist ik niet wat ik moest gaan doen. Ik verkocht T-shirts van Braziliaanse voetballers, begon een blog, speelde met de gedachte om tropische vruchten te importeren. Er kwam allemaal niets van. Gedurende dat proces van bezinning dacht ik ook weer eens aan het vak dat zo'n groot deel van mijn jeugd in beslag had genomen, en toen kreeg ik dat vonkje inspiratie dat leidde tot het schrijven van dit boek.

Het betreden van de wiskundewereld als volwassene is echter heel anders dan wanneer je er als kind binnenkomt; dan betekent de verplichting om proefwerken te maken en tentamens te halen dat het echt leuke gedeelte overgeslagen wordt. Nu kon ik echter allerlei zijwegen gaan

bewandelen, alleen maar omdat ze merkwaardig of interessant klonken. Ik maakte kennis met 'etnowiskunde', de studie naar hoe verschillende culturen wiskunde benaderen, en hoe wiskunde gevormd is door godsdienst. Ik raakte geboeid door recent onderzoek in gedragspsychologie en neurowetenschappen dat tracht precies vast te leggen waarom en hoe de geest in getallen denkt.

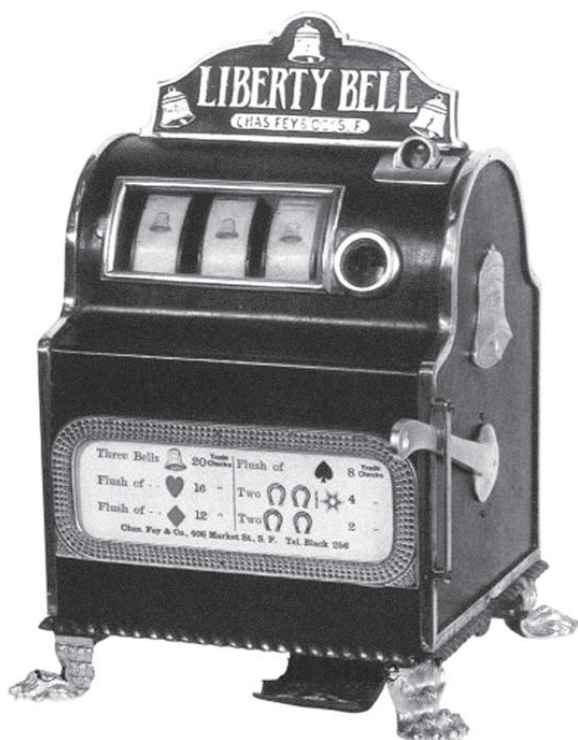
Ik beseftte dat ik me gedroeg als een buitenlandcorrespondent op zijn standplaats, alleen was het land waar ik me nu bevond, een abstract land – 'Getallenland'.

Mijn reis werd echter al gauw geografisch, aangezien ik wiskunde in de echte wereld wilde ervaren. En dus reisde ik naar India om uit te zoeken hoe in dat land de 'nul' was uitgevonden, een van de grootste intellectuele doorbraken in de geschiedenis van de mens. En ging ik naar een megacasino in Reno, VS, om te zien hoe 'waarschijnlijkheid' in de praktijk werkt. En in Japan maakte ik kennis met de meest 'gecijferde' chimpansee ter wereld.

Tijdens mijn onderzoek kwam ik in de merkwaardige positie dat ik tegelijkertijd specialist en niet-specialist was. Me opnieuw verdiepen in de wiskunde van de middelbare school was alsof ik oude vrienden tegenkwam, maar er waren ook heel veel vrienden van vrienden die ik toentertijd nooit had ontmoet, en er waren een paar nieuwe gasten in de buurt komen wonen. Zo was ik me er, voordat ik aan dit boek begon, niet van bewust dat eeuwenlang geprobeerd is twee getallen toe te voegen aan ons tientallig stelsel. Ik wist niet waarom Engeland als eerste land ter wereld een zevenhoekige munt invoerde. En ik had geen flauw benul van de wiskunde die achter de sudoku steekt (maar die was dan ook nog niet uitgevonden).

Zo kwam ik op onverwachte plaatsen, zoals Braintree in Essex en Scottsdale in Arizona, en naar onverwachte boekenplanken van de bibliotheek. Ik besteedde een gedenkwaardige dag aan het lezen van een boek over de geschiedenis van rituelen die te maken hebben met planten om te begrijpen waarom Pythagoras zo'n notoire moeilijke eter was.

Het boek begint met hoofdstuk nul, omdat ik wil benadrukken dat wat ik hierin behandel, gaat over wat er was voordat er wiskunde was. Het gaat dus over het verschijnen van getallen. Aan het begin van hoofdstuk een zijn de getallen verschenen en kunnen we serieus beginnen. Tussen dat punt en het einde van het twaalfde hoofdstuk, hoofdstuk elf, komen rekenen, algebra, meetkunde, statistiek en nog veel meer onderwerpen aan de orde, zoveel ik er maar in dit boek kwijt kan. Ik heb geprobeerd de technische zaken tot een minimum te beperken, maar soms kom ik er niet onderuit



De Liberty Bell van Charles Fey, zo groot als een kassa, had onmiddellijk succes toen hij aan het eind van de 19e eeuw voor het eerst werd gefabriceerd. (zie blz. 302)

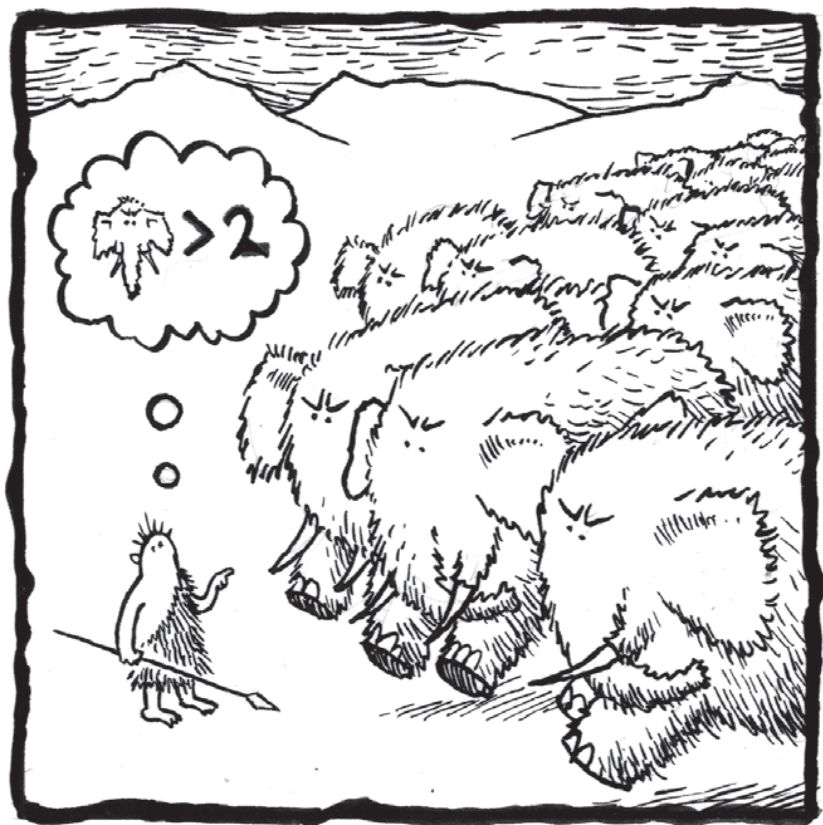
en moet ik wel met vergelijkingen komen en bewijzen aanvoeren. Heb je het idee dat je je hersenen te zeer moet pijnigen om me te kunnen volgen, sla dan de rest van het hoofdstuk over en ga naar het volgende, dat weer gemakkelijk begint. Elk hoofdstuk staat op zichzelf, wat betekent dat je het kunt begrijpen zonder de vorige hoofdstukken gelezen te hebben. Je kunt ze ook in willekeurige volgorde lezen, al hoop ik wel dat je ze op volgorde van het eerste tot het laatste leest, aangezien ze min of meer de chronologie van mijn ideeën volgen en ik af en toe verwijs naar iets wat ik eerder heb geschreven. Ik richt me met dit boek op de lezer zonder enige wiskundige kennis en behandel op eenvoudige wijze van alles – van onderwerpen die op de basisschool aan bod zijn gekomen tot concepten die pas tijdens de universitaire studie wiskunde worden belicht.

Ik heb nogal wat historisch materiaal gebruikt, aangezien wiskunde tevens de geschiedenis van de wiskunde is. In tegenstelling tot de menswetenschappen, die permanent opnieuw worden uitgevonden omdat nieuwe ideeën en nieuwe modes oude vervangen, en tot toegepaste wetenschap, waarin theorieën alsmat verijnd worden, veroudert wiskunde niet. De

stellingen van Pythagoras en Euclides zijn nu nog net zo geldig als ze altijd zijn geweest – daarom zijn Pythagoras en Euclides de oudste namen die we op school leren. De wiskundeboeken voor het eindexamen middelbare school bevatten nauwelijks wiskunde die niet al in het midden van de 17e eeuw bekend was, en die van het eerste studiejaar aan de universiteit gaan tot de wiskunde van het midden van de 18e eeuw. (De modernste wiskunde die ik voor mijn afstuderen moest leren, was van de jaren twintig van de vorige eeuw.)

Gedurende het hele proces van het schrijven van dit boek wilde ik aan de lezer overbrengen hoe spannend en wonderlijk de wiskunde kan zijn. (En ook om te laten zien dat wiskundigen grappig zijn. Wij zijn de koningen van de logica, wat ons buitengewoon gevoelig maakt voor het onlogische.) Wiskunde lijdt onder de reputatie dat het een saai en moeilijk vak is. Vaak is dat ook zo. Maar wiskunde kan ook inspirerend, toegankelijk en, vooral, fantastisch creatief zijn. Abstract wiskundig denken is een van de grote prestaties van de menselijke soort en zonder meer de basis van alle vooruitgang van de mens.

Getallenland is een merkwaardig land. Ik raad een bezoek zeker aan.



Wiskundeknobbel

Toen ik het appartement van Pierre Pica in Parijs binnenkwam, werd ik overvallen door de stank van een insectenbestrijdingsmiddel. Pica was net terug van een verblijf van vijf maanden bij een groep indianen in het regenwoud van de Amazone en was nu de geschenken die hij had meegenomen, aan het desinfecteren. De muren van zijn werkkamer waren versierd met maskers, veren hoofdtooiën en manden. De planken waren volgestapeld met wetenschappelijke boeken. Op een richel lag een Rubiks kubus, niet opgelost.

Ik vroeg Pica hoe de reis was geweest.

‘Zwaar,’ antwoordde hij.

Pica is taalkundige en misschien dat hij daarom langzaam en zorgvuldig praat, maar met erg veel aandacht voor de afzonderlijke woorden. Hij is in de vijftig, maar heeft iets jongensachtigs – met lichtblauwe ogen, een enigszins blozende huid en dun, warrig, zilvergrijs haar. Zijn stem is zacht, zijn houding bedachtzaam.

Pica is een leerling van de eminente Amerikaanse taalkundige Noam Chomsky; nu is hij in dienst van het Nationaal Centrum voor Wetenschappelijk Onderzoek van Frankrijk. De afgelopen tien jaar heeft hij zich vooral gericht op de Munduruku, een bevolkingsgroep met zo’n 7000 leden in het Braziliaanse Amazonegebied. De Munduruku zijn jagers-verzamelaars, die in kleine dorpen wonen die verspreid liggen in een stuk regenwoud dat twee keer zo groot is als Wales en de helft zo groot als Nederland. Pica interesseert zich vooral voor de taal van de Munduruku: die heeft geen tijden, geen meervoud en geen woorden voor getallen groter dan vijf.

Om veldwerk te kunnen doen, moet Pica een reis maken die de ontdekkingsreizigers waardig zou zijn. Het vliegveld dat het dichtst bij het gebied van de Munduruku ligt, is dat van Santarém, een stad aan de Amazone op 850 kilometer stroomopwaarts van de Atlantische Oceaan. Daar neemt hij een veerboot, die hem in vijftien uur ruim 300 kilometer over de Tapajós naar Itaituba brengt, een voormalig goudzoekersstadje en de laatste tussenstop om voedsel en brandstof in te slaan. Voor zijn laatste tocht huurde Pica in Itaituba een jeep, die hij volstouwde met uitrusting als computers, zonnepanelen, accu’s, boeken en 500 liter brandstof.



11 blinde muizen



1010 groene flessen



11000 merels
in een taart

De cultuur van het tellen

In de middeleeuwen leverde een *pimp* plus een *dik* je in Lincolnshire een *bumfit* op. Daar was niets onoorbaars aan. De woorden betekenden niet anders dan vijf, tien en vijftien in het jargon van de herders bij het tellen van hun schapen. De hele reeks was als volgt:

1. yan
2. tan
3. tethera
4. pethera
5. pimp
6. sethera
7. lethera
8. hovera
9. covera
10. dik
11. yan-a-dik
12. tan-a-dik
13. tethera-dik
14. pethera-dik
15. bumfit
16. yan-a-bumfit
17. tan-a-bumfit
18. tethera-bumfit
19. pethera-bumfit
20. piggot

Dit is een andere manier van tellen dan we tegenwoordig doen, en niet alleen omdat we de woorden niet kennen. De herders van Lincolnshire deelden hun getallen van *yan* tot *piggot* in in groepen van twintig. Had een herder meer dan twintig schapen – en was hij tijdens het tellen niet in slaap gevallen – dan onthield hij dat hij een hele cyclus had gehad door een steentje in zijn zak te stoppen, een streep te trekken op de grond of een lijntje te snijden in zijn staf. En dan begon hij bij het volgende schaap weer opnieuw: ‘*yan, tan, tethera...*’ Als hij bijvoorbeeld tachtig schapen

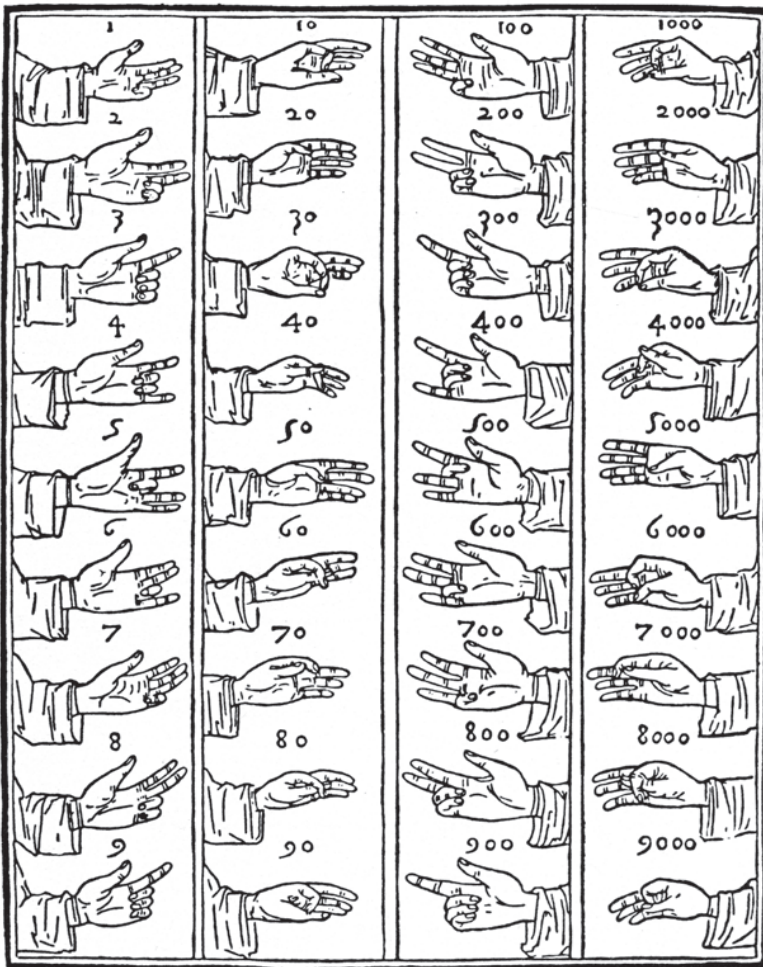
bezat, dan had hij dus na het tellen vier steentjes in zijn zak of vier strepen getrokken. Voor de herder is dit systeem erg efficiënt: hij heeft vier kleine voorwerpjes die tachtig grote vertegenwoordigen.

Maar wij groeperen aantallen in groepen van tien en ons getallenstelsel bestaat dan ook uit tien cijfers: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Het getal dat de groep aanduidt, dat vaak ook gelijk is aan het aantal gebruikte symbolen, wordt het grondtal van het getallenstelsel genoemd; in ons decimale stelsel is het grondtal 10, in dat van de herder is het grondtal 20.

Zonder een zinnig grondtal zijn getallen onbeheersbaar. Stel je voor dat het grondtal van de herder één was geweest, dan had hij dus maar een cijfer: *yan* voor één. Twee zou dan *yan yan* zijn, drie *yan yan yan*. Voor tachtig schapen had de herder tachtig keer *yan* moeten zeggen. Een dergelijk stelsel is volstrekt zinloos voor getallen boven de drie of vier. Aan de andere kant, stel dat er voor ieder getal een apart woord zou zijn; dan zou tot tachtig tellen een heel goed geheugen vereisen om alle 80 unieke woorden te kunnen onthouden. Tel nu maar eens op die manier tot duizend!

Veel geïsoleerde gemeenschappen gebruiken ongebruikelijke grondtallen. Zo tellen bijvoorbeeld de Arara in het Amazonegebied in paren; de getallen van een tot acht luiden *anane*, *adak*, *adak anane*, *adak adak*, *adak adak anane*, *adak adak adak*, *adak adak adak anane* en *adak adak adak adak*. Tellen in tweeën is echter niet veel beter dan tellen in enen. Om honderd uit te drukken moet je vijftig keer achter elkaar *adak* zeggen – wat van afdingen op de markt een tijdrovende geschiedenis maakt. Stelsels waarin de getallen gegroepeerd zijn in drieën en vieren, komen in het Amazonegebied ook voor.

De truc van een getallenstelsel is dat het grondtal groot genoeg moet zijn om getallen als honderd te kunnen zeggen zonder buiten adem te raken, maar ook weer niet zo groot dat we een onevenredige aanslag doen op ons geheugen. De meest gebruikte grondtallen in de geschiedenis zijn vijf, tien en twintig, en daarvoor is een voor de hand liggende reden: het zijn getallen die zijn afgeleid van het menselijk lichaam. We hebben vijf vingers aan een hand, en vijf is dus de eerste logische plaats om even adem te halen als je van één af telt. De tweede logische plaats is die van twee handen, tien vingers, en daarna die van handen en voeten, dat wil zeggen twintig vingers en tenen. (Er zijn stelsels die verschillende grondtallen combineren. De herder uit Lincolnshire gebruikt als grondtallen de vijf, tien en twintig: de eerste tien cijfers zijn uniek, de volgende tien zijn gegroepeerd in vieren.) De rol die de vingers hebben gespeeld in het tellen, is af te lezen aan de woorden voor getallen. Zo betekent het Engelse *digit* zowel ‘cijfer’ als ‘vinger’ en ‘teen’. In het Russisch is ‘vijf’ *piat*, terwijl het woord voor een uitgestrekte hand *piast* is. Het woord voor ‘vijf’ in het Sanskriet, *pantcha*, hangt samen met het Perzische *pentcha*, ‘hand’.

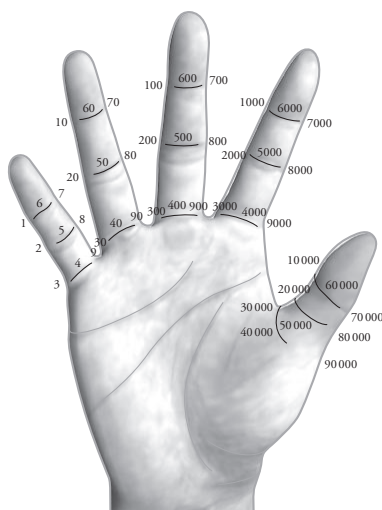


Op je vingers tellen, uit Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita van Luca Pacioli (1494).

Vanaf het moment dat de mens begon te tellen, gebruikte hij zijn vingers als hulpmiddel en het is niet overdreven om te stellen dat een groot deel van de wetenschappelijke vooruitgang te danken is aan de veelzijdigheid van onze vingers. Als mensen geboren zouden worden met stompjes aan de uiteinden van armen en benen, dan zou in alle eerlijkheid gesteld kunnen worden dat de mensheid intellectueel gesproken de steentijd nooit is ontstegen. Voordat men in staat was om, dankzij het wijdverbreide gebruik van potlood en papier, getallen op te schrijven, werden ze vaak overgebracht door middel van een ingewikkelde gebarentaal met de vingers. In de 8e eeuw stelde de theoloog Bede de Eerbiedwaardige een stelsel voor om tot een miljoen te tellen. Dat stelsel was deels rekenkundig en bestond deels uit handgebaren. Eenhe-

den en tientallen werden met de linkervingers en duim uitgedrukt, honderden duizendtallen met de rechter. Grotere eenheden werden weergegeven door de handen langs het lichaam naar boven en beneden te bewegen – met een nogal oneerbiedwaardig gebaar om 90.000 uit te drukken: ‘grijp in je lies met de linkerhand, de duim naar de geslachtsdelen,’ schreef Bede. Overtuigender was het teken voor een miljoen, een zelfvoldaan gebaar van succes en afronding: de handen ineengeslagen met de vingers in elkaar gevlochten.

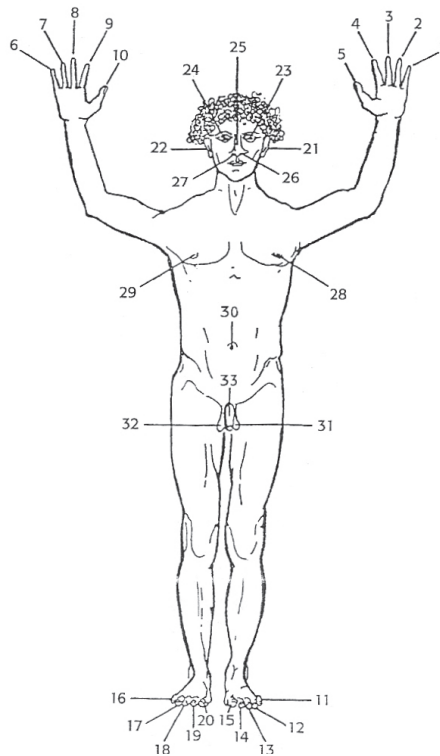
Tot nog maar een paar eeuwen geleden was geen rekenboek compleet zonder tekeningen van een systeem om op je vingers te tellen. Bij ons is deze vaardigheid grotendeels verloren gegaan, maar in sommige delen van de wereld bestaat het gebruik nog steeds. In India gebruiken handelaren die hun zaakjes voor buitenstaanders verborgen willen houden, een systeem van het aanraken van elkaars knokkels onder een mantel of doek. In China wordt een ingenieuze – om niet te zeggen overdreven ingewikkelde – techniek gebruikt waarmee men tot één minder dan tien miljard kan tellen: tot 9.999.999.999. Iedere vinger heeft negen denkbeeldige punten, dat wil zeggen drie op iedere lijn tussen de kootjes, zoals op de tekening is aangegeven. Op de rechterpink staan deze punten voor de getallen 1 tot 9. Die op de rechteringvinger staan voor 10 tot 90, die op de rechtermiddelvinger voor 100 tot 900, enzovoort. Op deze manier kun je ruimschoots alle mensen op aarde tellen op niet meer dan je vingers: je hebt de hele wereld in je hand.



In dit Chinese systeem staan op iedere vinger negen punten, die iedere orde van grootheid van 1 tot 9 vertegenwoordigen. Met je rechterhand kun je dus ieder getal uitdrukken tot $10^5 - 1$ door met je andere hand de relevante punten aan te raken. Verwissel van hand en je kunt doorgaan tot $10^{10} - 1$. Een 'nul' is op geen enkele vinger nodig; als er geen waarden zijn die betrekking hebben op die vinger, dan raak je die gewoon met je andere hand niet aan.

In sommige culturen worden meer lichaamsdelen gebruikt dan alleen vingers en tenen. Aan het einde van de 19e eeuw arriveerde een expeditie van Britse antropologen op de eilanden in Straat Torres, de zeestraat tussen Australië en Papoea-Nieuw-Guinea. Zij ontdekten daar een gemeenschap die begon te tellen met 'rechterhand pink' voor 1, 'rechterhand ringvinger' voor 2, enzovoort, tot 'rechterpols' voor 6, 'rechterelleboog' voor 7 en zo door via de schouders, het borstbeen, linkerarm en -hand, voeten en benen, eindigend met 'rechtervoet kleine teen' voor 33. Latere expedities ontdekten in de regio nog veel meer gemeenschappen met vergelijkbare rekenstelsels met lichaamsdelen.

Het merkwaardigste is misschien wel dat van de Yupno, het enige Papoea-volk waarvan ieder individu een melodietje bezit dat als een naam of kenmerkende melodie bij hem of haar hoort. Zij hebben een manier van tellen waarbij de neusvleugels, ogen, tepels en navel worden meegerekend, waarna 31 de 'linkertestikel' is, 32 de 'rechtertestikel' en 33 de 'penis'. Men kan even stilstaan bij het belang van 33 in de drie grote monotheïstische godsdiensten (de leeftijd waarop Christus stierf, de lengte van koning Davids regeerperiode, het aantal kralen aan het gebedssnoer van de moslims), maar wat zo intrigerend is aan het fallische getal van de Yupno is dat ze er zelf verlegen mee zijn.



Een dode Yupno.



Het eind van de lijn

Enkele jaren geleden lag Daina Taimini op de bank in haar huis in Ithaca, New York, waar ze doceert aan Cornell University. Een gezinslid vroeg haar wat ze deed.

‘Ik ben een hyperbolisch vlak aan het haken,’ antwoordde ze, verwijzend naar een concept dat wiskundigen al bijna tweehonderd jaar fascineert en voor raadsels stelt.

‘Heb je een wiskundige ooit zien háken?’ was het misprijzende antwoord.

Maar dat sterkte Daina alleen maar in haar voornemen om handwerk te gebruiken voor de wetenschappelijke vooruitgang. Dat is precies wat ze deed. Ze vond iets uit wat bekend is als ‘hyperbolisch haakwerk’, een manier van haken die voorwerpen oplevert die niet alleen ingewikkeld en mooi zijn, maar die ook heeft bijgedragen aan begrip van de meetkunde op een manier die wiskundigen nooit voor mogelijk hadden gehouden.

Ik kom zo aan een gedetailleerde definitie van *hyperbolisch* en de inzichten die Daina’s haakpatronen hebben opgeleverd, maar voorlopig hoeft je alleen maar te weten dat hyperbolische wiskunde een uiterst contra-intuïtief soort meetkunde is die begin 19e eeuw is ontstaan en waarin de postulaten die Euclides in zijn *Elementen* zo zorgvuldig vastlegde, als onjuist werden beschouwd. ‘Niet-euclidische’ meetkunde was een keerpunt voor wiskundigen in die zin, dat ze een theorie van fysieke ruimte beschreef die volledig in tegenspraak was met onze ervaring van de wereld. Daardoor was die moeilijk voorstelbaar, maar desondanks bevatte de theorie geen wiskundige contradicties en was wiskundig dus even valide als het euclidische systeem dat er eerder was geweest.

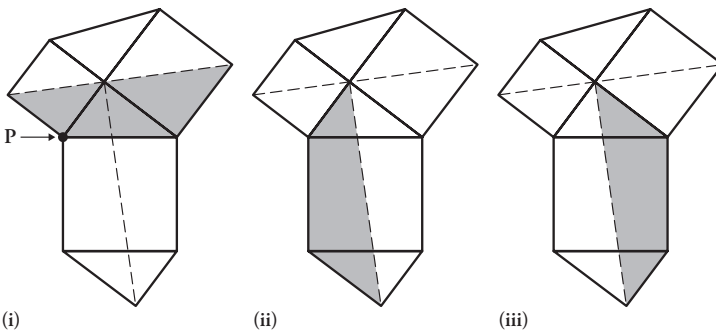
Later die eeuw werd een even belangrijke intellectuele doorbraak bereikt door Georg Cantor, die ons intuïtieve begrip van het oneindige op zijn kop zette door te bewijzen dat oneindigheid verschillende vormen heeft. Niet-euclidische meetkunde en Cantors verzamelingenleer waren poorten naar twee vreemde, wonderbaarlijke werelden, die ik op de volgende pagina’s beide zal bezoeken. Samen markeerden ze aantoonbaar het begin van de moderne wiskunde.

Bijlage een

Als je wilt weten hoe de vierkanten van Anniarizi de stelling van Pythagoras bewijzen, moet je naar de gemarkeerde driehoek in de tekening op blz. 83 kijken. Het enige wat we hoeven te doen, is het vierkant van de hypotenusa te herschikken als de vierkanten van de twee andere zijden. Het vierkant van de hypotenusa bestaat uit vijf secties, waarvan er drie lichtgrijs zijn en twee donkergrijs. Als we even kijken naar hoe het patroon herhaald wordt, dan zien we dat de lichtgrijze secties precies het vierkant vormen van de lange van de rechte zijden van de driehoek, en dat de donkergrijze secties het vierkant vormen van de korte zijde.

Voor het bewijs van Leonardo moeten we eerst aantonen dat de grijze secties in de afbeeldingen (i) en (ii) hieronder gelijk zijn. Dat doen we door de sectie in punt P te roteren. De twee secties hebben gelijke zijden en gelijke hoeken en moeten dus wel hetzelfde zijn. Daarna moeten we aantonen dat deze sectie gelijk is aan de sectie in (iii). Dat moet wel zo zijn aangezien die sectie uit identieke delen bestaat.

Met deze informatie kunnen we het bewijs afronden. De kopie (grijs in ii) van de eerste grijze sectie (i) en het spiegelbeeld (grijs in iii) bestaan uit twee identieke rechthoekige driehoeken met de bij de rechte zijden behorende vierkanten. Dit oppervlak moet gelijk zijn aan het oppervlak van de secties (ii) en (iii) samen, dat bestaat uit twee identieke rechthoekige driehoeken en het vierkant van de hypotenusa. Als we het oppervlak van de twee driehoeken van deze beide gevallen aftrekken, dan moet het oppervlak van het vierkant van de hypotenusa gelijk zijn aan het oppervlak van de twee andere vierkanten.



Bijlage twee

In een vierkant heeft de diagonaal de lengte $\sqrt{2}$. Om aan te tonen dat dit een irrationaal getal is, zal ik een *bewijs uit het ongerijmde* leveren, dat wil zeggen dat ik zal proberen te bewijzen dat het tegendeel waar is, dus dat $\sqrt{2}$ rationaal is. Daarna zal ik laten zien dat dit tot een tegenstrijdigheid leidt. Als het tegenstrijdig blijkt om te zeggen dat $\sqrt{2}$ rationaal is, dan moet het dus wel irrationaal zijn.

Als $\sqrt{2}$ rationaal is, dan kun je het getal in de natuurlijke getallen a en b uitdrukken, zodat $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. We nemen aan dat dit de meest gereduceerde vorm van de breuk is en dat dit de kleinst mogelijke teller en noemer zijn, zodat $\frac{a}{b}$ niet geschreven kan worden als $\frac{m}{n}$ waarbij m en n natuurlijke getallen zijn kleiner dan a en b .

Als $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, dan kun je beide kanten van de vergelijking in het kwadraat zetten waardoor je $2 = \frac{a^2}{b^2}$, hetgeen je kunt herschrijven als $a^2 = 2b^2$.

Wat de waarde van b^2 ook is, $2b^2$ is even aangezien het vermenigvuldigen van een natuurlijk getal met 2 altijd een even getal oplevert. Als $2b^2$ even is, dan is a^2 ook even. Aangezien het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is en dat van een even getal altijd even, volgt hieruit dat a een even getal is.

Als a even is, dan moet er een getal c zijn dat kleiner is dan a waarvoor geldt $a = 2c$, en dan geldt $a^2 = (2c)^2 = 4c^2$.

Als we in de vergelijking hierboven a^2 vervangen door $4c^2$, dan krijgen we $4c^2 = 2b^2$. En dan is $b^2 = 2c^2$. Volgens dezelfde redenering als hierboven betekent dit dat b^2 ook even is, en dus is b even. Als b even is, dan is er een getal d dat kleiner is dan b , zodat $b = 2d$.

Nu kunnen we $\frac{a}{b}$ dus herschrijven als $\frac{2c}{2d}$, en als we door 2 delen wordt dat $\frac{c}{d}$. En nu hebben we onze tegenstrijdigheid. Boven hebben we immers gesteld dat $\frac{a}{b}$ de meest gereduceerde vorm van de breuk is, waaruit volgt dat er geen waarden voor c en d bestaan die kleiner zijn dan a en b , zodat $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. We zijn aangekomen bij een tegenstrijdigheid. Door aan te nemen dat $\sqrt{2}$ geschreven zou kunnen worden als $\frac{a}{b}$, kan het niet anders dan dat $\sqrt{2}$ niet zo geschreven kan worden, en dus is $\sqrt{2}$ irrationaal.

*'Een feestmaal voor liefhebbers
van wiskunde op alle niveaus.'*

– Kirkus Reviews

*'Niet zomaar een boek over wiskunde.
(...) Fantastisch en onderhoudend.'*

– The Times

Alex Bellos legt in **Getallen ontraadseld** met passie de basis-
principes van wiskunde uit. Hij zet alles over wiskundige
formules, statistiek en symbolen helder op een rij. Door zijn
enthousiaste aanpak weet hij de veelvoorkomende angst
voor getallen weg te nemen. Hij laat zien dat het bij wiskunde
vooral gaat om creatief denken en beschrijft hoe wiskunde
ook in andere disciplines in het leven van belang is. Wiskunde
is leuk!

Alex Bellos is journalist met een fascinatie voor wiskunde en filosofie. Hij
schrijft sinds jaren columns over alledaagse wiskunde in **The Guardian**.

ISBN 978-90-215-3570-8



9 789021 535708 >

www.kosmosuitgevers.nl


KOSMOS

NUR 918

Kosmos Uitgevers, Utrecht/Antwerpen